DETERMINANTY, část 3

Minule jsme odvodili:

Věta Je-li $A \in T^{n \times n}$ regulární matice, pak $(A^{-1})_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji})}{\det(A)}$.

Věta (Laplaceův rozvoj): Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ji} \cdot \det(A^{ji}).$$

„rozvoj podle sloupce i"

Důkaz:

i-tý sloupec A lze rozepsat jako $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot e_j^T$

Podle věty o linearitě determinantu platí:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \underbrace{\det(A_{i \to e_j})}_{\text{užíváme: } = (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji})} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji}). \quad \blacksquare$$

Def: Nechť $A \in T^{n \times n}$ (libovolná, klidně singulární), $n \geq 2$, je matice. Pak **adjungovaná matice** k matici A je matice daná předpisem:

$$(\mathrm{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji}) \quad \begin{matrix} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n \end{matrix}.$$

Všimněme si: Pro regulární matici A platí:

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}$$

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

- Uvažme lineární zobrazení $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(x)=A\cdot x$ pro $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}={}_K[f]_K$
- Uvědomme si, že A je též matice f vůči kanonické bázi K.
- Uvažme dále vektory $\boxed{b_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}$, $\boxed{b_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}$, bázi $B=(b_1,b_2)$

  a matici f vůči B:

Podle definice

$${}_B[f]_B=\left([f(b_1)]_B,[f(b_2)]_B\right)=$$

$$=\left(\left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]_B,\left[\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}\right]_B\right)=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}}_{=A'}$$

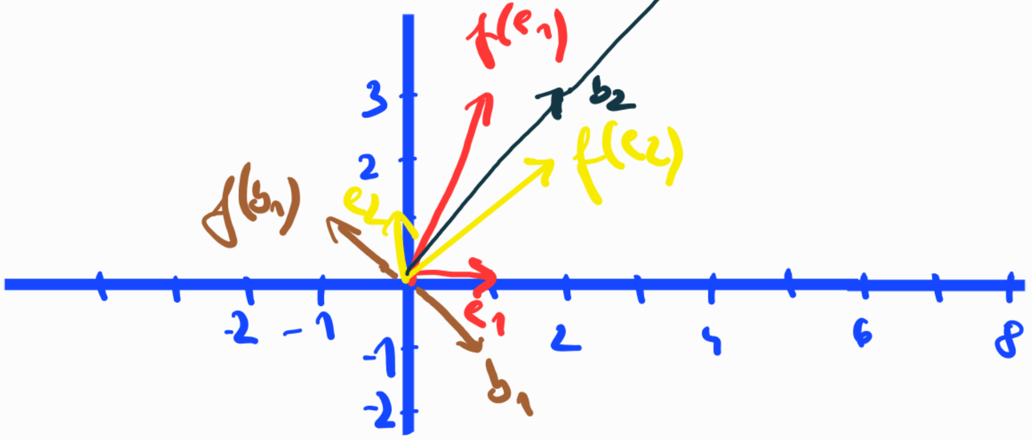
jednodušší = hezká matice - diagonální

uvidíme souvislost

Všimneme si:

$$\left.\begin{aligned}f(b_1)&=-b_1\\ f(b_2)&=4\cdot b_2\end{aligned}\right\}$$ zobrazí fce na svůj násobek

$f(b_2)=\begin{pmatrix}8\\12\end{pmatrix}$



dále: $\det(A)=\det(A')=-4$

O čem to je: pro dané lin. zobrazení $f: V \to V$, (nebo pro čtvercovou matici $A \in T^{n \times n}$)

- chceme najít bázi, vůči které má f **jednoduchý** (hezký) popis ($\sim$ diagonální matice)
- chceme najít **směry**, které zobrazení **nemění**

- Připomeňme si: **Matice přechodu od báze** $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ **k bázi** $B = (b_1, \dots, b_n)$:

$$ {}_B[id]_{B'} = \left([b'_1]_B \cdots [b'_n]_B \right) $$

Platí: ${}_{B'}[id]_B = {}_B[id]_{B'}^{-1}$

k sobě inverzní matice

- Také **víme** (skládání zobrazení):

$$ {}_B[f]_B = {}_B[id]_K \, {}_K[f]_K \, {}_K[id]_B $$

tu chceme hezkou - diagonální ideálně.

V našem příkladu:

$$ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A'} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{T} $$

$\det T = 5$

Def-ice: Čtvercové matice A a A' se nazývají **podobné**, pokud $A' = R \cdot A \cdot R^{-1}$ pro nějakou regulární R.

Def: Matice A je **diagonalizovatelná**, je-li podobná nějaké diagonální matici.

Např.: A, A' v příkladu jsou podobné, A je diagonalizovatelná.

Def: Je-li $f: V \to V$ lineární zobrazení (V je VP nad T), pak $\lambda \in T$ je **vlastní číslo zobrazení f**, právě když existuje **nenulový** vektor $v \in V$ t.ž. $f(v) = \lambda \cdot v$.
Vlastní vektor příslušný k λ je každé $v \in V$, $v \neq 0$ splňující $f(v) = \lambda \cdot v$.

Def: Je-li $A \in T^{n \times n}$, pak $\lambda \in T$ je **vlastní číslo matice A** právě když existuje $v \neq 0$ t.ž. $Av = \lambda v$.

: Vlastní vektory odpovídající stejnému vl. číslu, doplněné o nulový vektor, tvoří **vektorový podprostor** ... nad T.

důkaz: Uvažme lin. zobr. $f: V \to V$ a jeho vl. č. λ.
Označme $U = \{v \in V : f(v) = \lambda \cdot v\} \cup \{0\}$.
Chceme ověřit uzavřenost U na sčítání a násobení.
Pro libovolné $u, v \in U$, $t \in T$ platí:

$$f(t \cdot u) = t \cdot f(u) = t \cdot \lambda \cdot u = \lambda \cdot (t \cdot u)$$

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda \cdot u + \lambda v = \lambda (u+v) \quad \blacksquare$$

Věta (Charakterizace vlastních čísel - souvislost s deter.)
Buď $A \in T^{n \times n}$. Pak λ je vlastním číslem A právě tehdy, když $\det(A - \lambda I) = 0$.

Důkaz: λ vl. číslo $\iff \exists v \neq 0$ t.ž. $Av = \lambda v = \lambda I v$

$\iff \exists v \neq 0 \ (A - \lambda I)v = 0 \iff A - \lambda I$ singulární

$\iff \det(A - \lambda I) = 0 \quad \blacksquare$

Def. **Charakteristický mnohočlen** matice $A \in T^{n \times n}$ definujeme jako $p_A(t) = \det(A - t \cdot I)$, kde t je proměnná.

vlastní čísla A .... kořeny $p_A(t)$

Pozorování: Buď $f: V \to V$ lin. zobrazení.
Báze B t.ž. ${}_B[f]_B$ je diagonální, existuje právě tehdy, když existuje báze složená z vlastních vektorů.

Důkaz: $\Rightarrow$ pro B t.ž. ${}_B[f]_B$ je diagonální, uvaž $b \in B$.

Pak $[b]_B = e_i$, pro nějaké i.

Protože $$[f(b)]_B = \underbrace{{}_B[f]_B}_{\text{diagonální}} \underbrace{[b]_B}_{e_i} = ({}_B[f]_B)_{ii} \cdot e_i,$$

tj. $f(b)$ je násobek b, tedy b je vlastní vektor.

$\Leftarrow$ Nechť $B = (b_1, \dots, b_n)$ je báze V t.ž. každé b_i je vlastní vektor, tj. $\forall i\ \exists \lambda_i$ t.ž. $f(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$.

Proto $${}_B[f]_B = \Big(\underbrace{[f(b_1)]_B}_{=[\lambda_1 b_1]_B} \cdots \underbrace{[f(b_n)]_B}_{=[\lambda_n b_n]_B}\Big) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \blacksquare$$

Věta: Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ navzájem různá vlastní čísla zobrazení f (matice A) a $v_1, \dots, v_n$ jsou vlastní vektory příslušné vl. číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak vektory $v_1, \dots, v_n$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: indukcí dle n. $n=1$ – OK

ind. krok $n-1 \to n$: Uvaž LK $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. (*)

Pak $0 = f(0) = f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i - \lambda_n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right)}_{=0} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_n)}_{\neq 0} v_i$$

$\Rightarrow$ dle ind. př. $v_1, \dots, v_{n-1}$ LN $\Rightarrow a_i = 0\ \forall i = 1, \dots, n-1$

Díky (*) musí být také $a_n = 0 \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ jsou LN.

Důsledek: Čtvercová matice $n \times n$ má nejvýše n různých vlastních čísel. $\blacksquare$

Důsledek 2: Má-li A n různých vl. čísel, pak je diagonalizovatelná. (neplatí naopak!)

Poznámka k vektoru 0: nikdo ho nepovažuje za vl. vektor, nikdo ne. Je možné definovat vl. vektory tak, aby do nich 0 patřil, i tak, aby do nich 0 nepatřil.
Podle toho, jak se to zavede, je pak občas třeba dávat pozor v jiných situacích.