DETERMINANTY

Opakování:

Def: **Determinant** čtvercové matice $A \in T^{n \times n}$ je číslo $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$.

Platí:

i) Je-li $A = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \in T^{n \times n}$ (matice), $z^T \in T^n$ (vektor), $\alpha, \beta \in T$ (skaláry), pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\det \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha v_i + \beta z & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det(A) + \beta \cdot \det \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & z & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-tý řádek}$$

ii) Je-li A' matice vzniklá z A prohozením dvou řádků, pak $\det(A') = -\det(A)$.

iii) $\det(A^T) = \det(A)$

Pozn. díky iii), platí i) a ii) také pro sloupce

ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVY A DET.

Zajímá nás

1. jaký determinant mají matice ERÚ
2. co dělají ERÚ s determinantem

- vynásobení řádku i nenulovým t
$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & t & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} i$$

1. $\det(E) = t$
2. podle bodu i) věty:
$$\det(E \cdot A) = t \cdot \det(A) = \det(E) \cdot \det(A)$$

- přičtení t-násobku řádku j k řádku $i \neq j$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & t & \\ & & \ddots & \vdots & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1. $\det(E) = 1$
2. podle bodu ii) v předešlé větě: $\det(E \cdot A) = \det(A) = \det(E) \cdot \det(A)$

- prohození dvou řádků $i \neq j$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

1. $\det(E) = -1$
2. podle bodu iii) v předešlé větě:
$$\det(E \cdot A) = -\det(A) = \det(E) \cdot \det(A)$$

$\Rightarrow$ Dostáváme:

Lemma: Nechť $A \in T^{n \times n}$ a E je matice nějaké ERÚ. Pak platí: $\det(E \cdot A) = \det(E) \cdot \det(A)$.

$\Rightarrow$ Pokud na A aplikujeme postupně $E_1, \dots, E_k$, pak:
$$\det(E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A) =$$
$$= \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1}) \cdot \det(E_{k-2} \cdots E_2 E_1 A) = \dots =$$
$$= \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1}) \cdots \det(E_2) \cdot \det(E_1) \cdot \det(A)$$

Označme $F = E_k E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1$.

Pak: $\det(F) = \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1}) \cdots \det(E_1)$ vol $A = I$

$\Rightarrow$ matice úprav má vždy nenulový determinant

$$\det(F \cdot A) = \det(F) \cdot \det(A)$$

Věta: i) Matice $A \in T^{n \times n}$ je regulární, právě když $\det(A) \neq 0$.

ii) Gaussova eliminace umožňuje výpočet $\det(A)$:

$$\det(A) = \frac{\det(F \cdot A)}{\det(F)}$$ matice v trojúhelníkovém tvaru

iii) Pro každé $A, B \in T^{n \times n}$ platí:

$$\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$$

Důkaz: i) Úvaž úpravy vedoucí do redukovaného odstupňovaného tvaru

pro A regulární $\rightarrow$ dostaneme $F \cdot A = I$, $\det(I) \neq 0$

singulární $\rightarrow$ —"— $F \cdot A$ má nulový řádek

$\det(F \cdot A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$

ii) jsme už odvodili,

iii) jsme odvodili pro případ, že B je součinem matic EŘÚ, což je každá regulární.

Je-li B singulární, pak BA je také singulární, tudíž $\det(BA) = 0 = \det(A)$. ∎

LAL 2/3

Věta (Cramerovo pravidlo): Nechť $A \in T^{n \times n}$ je regulární matice a $b \in T^n$. Pak pro (jediné) řešení soustavy $Ax = b$ platí, pro $i = 1, \dots, n$:

$$x_i = \frac{\det(A_{i \to b})}{\det(A)}, \text{ kde}$$

$A_{i \to b}$ je matice vzniklá z A nahrazením i-tého sloupce vektorem b.

__Důkaz:__ Víme: $x = A^{-1} \cdot b$ – řešení.

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$, nechť I_i označuje matici vzniklou z I nahrazením i-tého sloupce vektorem $A^{-1}b$ (tj. $I_i = I_{i \to A^{-1}b}$).

Pak jistě $\det(I_i) = x_i$.

$$I_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & \boxed{x} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Všimneme si: $A \cdot I_i = A_{i \to b}$

$\Rightarrow$ podle předešlé věty, třetí část:

$$\det(A_{i \to b}) = \det(A \cdot I_i) = \det(A) \cdot \det(I_i) = \det(A) \cdot x_i$$

neboli $x_i = \dfrac{\det(A_{i \to b})}{\det(A)}$ $\blacksquare$

VZOREC PRO INVERZNÍ MATICI $n\times n$

Opakování: B je inverzní k A pokud $A\cdot B = I$

Víme: $I = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ stačí vyřešit n soustav $Ax = e_j$

- Použijeme Cramerovo pravidlo:

$$x_i = \frac{\det(A_{i\to e_j})}{\det(A)} \qquad A_{i\to e_j} = \begin{array}{c} i\text{-tý} \\ \left[\begin{array}{ccc} & 0 & \\ & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & 0 & \end{array}\right] \\ e_j \end{array} \; j\text{-tý}$$

- Všimneme si, že $\det(A_{i\to e_j})$ vůbec nezávisí na řádku j matice A!

Proč? pro každé $\pi \in S_n$ platí: když $\pi(j) \neq i$, tak pro $k = \pi^{-1}(i)$: $A_{k\pi(k)} = A_{ki} = 0$ – permutace π do det nic nepřispěje.

motivace $\Downarrow$

označme A^{ji} matici $(n-1)\times(n-1)$ vzniklou z A vynecháním j-tého řádku a i-tého sloupce

Lemma: $\det(A_{i\to e_j}) = (-1)^{i+j}\cdot\det(A^{ji})$

Důkaz: Postupně $(n-j)$-krát prohodíme původní j-tý řádek matice $A_{i\to e_j}$ s řádkem pod ním, pak $(n-i)$-krát prohodíme původní i-tý sloupec s vedlejším sloupcem napravo.

Dostaneme matici $B = \left[\begin{array}{c|c} A^{ji} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \cdots & 1 \end{array}\right]$ ← podle věty z minula

Víme: každé prohození změnilo znaménko,

tedy $\det(A_{i \to e_j}) = (-1)^{n-i+n-j} \cdot \det(B) =$

$= (-1)^{i+j} \cdot \det(B) = (-1)^{i+j} \det(A^{ji})$

Dále využijeme definice det:

$$\boxed{\det(B)} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{k=1}^{n} B_{k\pi(k)} =$$

$$= \sum_{\substack{\pi \in S_n: \\ \pi(n)=n}} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} B_{k\pi(k)}$$

$$= \sum_{\pi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} B_{k\pi(k)} = \boxed{\det(A^{ji})}$$

∎

Dokázali jsme:

Věta Je-li $A \in T^{n \times n}$ regulární matice,

pak $\quad (A^{-1})_{ij} = \dfrac{(-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji})}{\det(A)}$.

Věta (Laplaceův rozvoj): Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ji} \cdot \det(A^{ji}).$$

Důkaz:

i-tý sloupec A lze rozepsat jako $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot e_j^T$

Podle věty o linearitě determinantu platí:

už umíme

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \det(A_{i \to e_j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji}).$$ ∎