**Věta**: Nechť $f$ je symetrická bilineární forma na VP $V$ nad $T$ charakteristiky $\neq 2$. Pak existuje báze $B$ t.ž. matice $f$ vůči $B$ je diagonální. tzv. polární báze

**Důsledek** (Sylvestrův zákon setrvačnosti kvadratických forem)
Pro každou kvadratickou formu $g$ na VP konečné dim. nad $\mathbb{R}$ existuje báze, vůči níž má $g$ diagonální matici pouze s $0, 1, -1$. Navíc počet $1$ a počet $-1$ je pro každou takovou bázi stejný. tzv. signatura

**Důkaz**: 1. část – existence – snadné dokázat.

2. část – jednoznačnost: Nechť $D$ a $D'$ jsou diagonální matice kvadr. formy $g$ vůči dvěma různým bázím $B = (b_1, \dots, b_n)$ a $C = (c_1, \dots, c_n)$.

Pak $[id]_{BC}^T \cdot D \cdot [id]_{BC} = D'$ (regulární) $\Rightarrow \operatorname{rank}(D) = \operatorname{rank}(D')$

$\Rightarrow$ stejný počet $0$ na diagonále $D$ a $D'$.

BÚNO* v $D$ i $D'$ jsou na diagonále nejprve $+1$, pak $-1$, pak $0$.
(* permutují vektory v bázích)

$p \dots \# 1$ v $D$
$q \dots \# 1$ v $D'$
} Pro spor předpokládejme $q < p$.

Nechť $P = \mathcal{L}(\{b_1, \dots, b_p\})$, $Q = \mathcal{L}(\{c_{q+1}, \dots, c_n\})$.

Protože $\dim(P) + \dim(Q) = p + (n-q) > n$, existuje $v \in P \cap Q$, $v \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad v = \sum_{i=1}^{p} \beta_i b_i = \sum_{j=q+1}^{n} \gamma_j c_j, \quad \text{pro vhodná } \beta_i, \gamma_j \in \mathbb{R}$$

Pak ale:
$$g(v) = [v]_B^T \cdot D \cdot [v]_B = \sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 > 0$$
$$g(v) = [v]_C^T \cdot D' \cdot [v]_C = \sum_{j=q+1}^{n} (-1) \cdot \gamma_j^2 \leq 0$$
} spor

$\Rightarrow q \geq p$. Symetricky dostaneme $p \geq q \Rightarrow p = q$. ∎

**Příklad:** nechť $g(x) = x^T A x$, pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Najdeme rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & -1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}^{D} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & -1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Pak pro

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{3} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ máme } D = S^T D' S.$$

---

**Důsledek:** v $\mathbb{R}^2$ existuje 6 typů kvadratických forem:

- klasifikace podle jejich diagonální matice s $0, 1, -1$:

| "parabola 3D" | pringles | otočená "parabola 3D" | parabola 2D | | rovina |
|---|---|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ |
| $x_1^2 + x_2^2$ | $x_1^2 - x_2^2$ | $-x_1^2 - x_2^2$ | $x_1^2$ | $-x_1^2$ | $0$ |

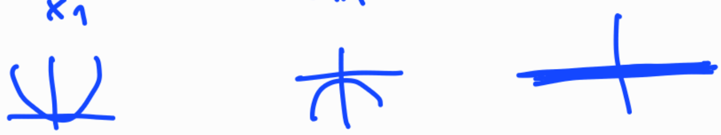
$$\underbrace{x_1^2 + x_2^2 \qquad x_1^2 - x_2^2 \qquad -x_1^2 - x_2^2}_{\text{paraboloid}}$$

- satelitní anténa
- zrcadlo světel
- olympijský oheň

---

v $\mathbb{R}^1$ jen 3 typy:

| parabola | | |
|---|---|---|
| $(1)$ | $(-1)$ | $(0)$ |
| $x_1^2$ | $-x_1^2$ | $0$ |



# OHLÉDNUTÍ

## Zimní semestr:

1. Soustavy lin. rovnic a Gauss. eliminace
2. Vektorové prostory a lineární zobrazení
3. Matice a operace s nimi

   klíčový pojem: lineární kombinace

## Letní semestr:

4. Determinanty (1, 3)
5. Vlastní čísla a vlastní vektory (2, 3, 4)
   ⋯ QR rozklad
6. Skalární součin ve VP (1, 2, 3)
   ⋯ ortogonální doplněk
7. Pozitivně definitní matice (3, 4, 5, 6)
8. Bilineární a kvadratické formy (2, 5, 6, 7)

Rozklady matic: QR, Choleského, Sylvestr

**Důležité:** práce s maticemi – násobení – ERÚ – Gauss.

# GPT a LINEÁRNÍ ALGEBRA

Generative Pre-trained Transformer

**hra**: „přidej slovo", vytvoř příběh. Např.:

Honza šel do sklepa a našel tam mrtvou myš ....
1 2 3 4 5 6 7 8 9

---

$V$ ... množina všech slov (tokenů), $n = |V|$ GPT3 $\sim 50\,000$

auto|dráha, moto|techna, ...

tzv. slovník

**úkol** (hráč hry „přidej slovo"):

vstup: posloupnost slov $w_1, w_2, \dots, w_k \in V$

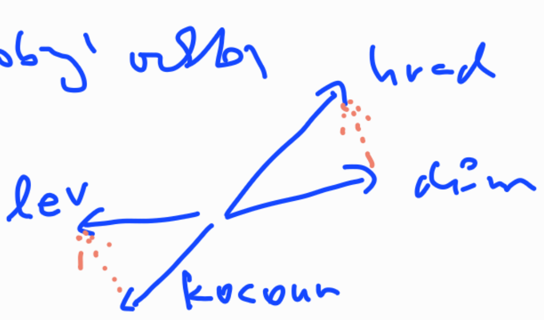
výstup: následující slovo $w_{k+1} \in V$

---

**Jak reprezentovat slova?**

- posloupnost písmen (pro řadu jiných aplikací OK)
  nevýhody: samotné písmeno nenese skoro žádnou informaci o významu
- vektor délky $n$, $e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$ reprezentuje i-té slovo ze slovníku $V$ — i-tá složka $\sim$ očíslování slov
  nevýhody: není úsporné, opět skoro žádná informace o významu slov
- vektor délky $d < n$ GPT3 $\sim$ 13 tis.
  přání: podobná slova — podobné vektory

příklad:




Matice $W_e \in \mathbb{R}^{d \times n}$ ← předučená

- tzv. vnořovací matice

reprezentuje zobrazení $e : V \to \mathbb{R}^d$, $e(w) = W_e \cdot e_i$,
kde $i$ je pořadí slova $w$

(embedding)

$$
W_e: \quad
\begin{array}{c|cccccc|}
 & \multicolumn{6}{c}{\text{všechna slova}} \\
 & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\
\hline
1 & & & & & & \\
2 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
d & & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

i-tý sloupec $W_e$ je vektorová reprezentace i-tého slova ze slovníku $V$

Budeme potřebovat také něco jako inverzní matici/zobrazení, co nám k vektoru $x \in \mathbb{R}^d$ dá pstní distribuci na množině všech slov ze slovníku $V$

$$
W_u^T = \quad
\begin{array}{c|ccccc|}
\hline
1 & & & & & \\
2 & & & & \cdots & \\
\vdots & & & & & \\
d & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

$W_u \cdot x \in \mathbb{R}^n$

normal$(W_u x)$

též je předučená

---

Jak reprezentovat slova ve větě / delším textu?

- přidání informace o pořadí slova (ve větě/textu)
- pracujeme s omezenou délkou úseku – $\ell_{max}$ ~1-4 tis.

$$
W_p = \quad
\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & \cdots & \ell_{max} \\
\hline
1 & & & & \\
2 & & & & \\
\vdots & & & & \\
d & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

reprezentuje zobrazení $p: \{1, \dots, \ell_{max}\} \to \mathbb{R}^d$

také předučená

---

Pro vstup – posloupnost slov $w_1, \dots, w_k$ – spočítáme počáteční vektorovou reprezentaci $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$,

kde $x_i = e(w_i) + p(i)$ ~ maticové násobení a sčítání

---

Jak rozlišit různé významy téhož slova?

Zajíc se chytil do oka.

Jan Žižka přišel o oko.

Idea: vektorovou reprezentaci $x_i$ slova $w_i$ upravit tak, aby zohledňovala kontext – předešlá slova $w_1, \dots, w_{i-1}$ resp. jejich vektorovou reprezentaci $x_1, \dots, x_{i-1}$

zajišťuje to tzv. mechanismus pozornosti (attention)

Potřebujeme nastavit:

- **jak moc**, které ze slov $w_1, \dots, w_i$ ovlivňuje $x_i$?

  podle toho, jak moc spolu slova souvisí –

  - nesouvisející slova se neovlivňují
  - související slova upřesňují význam

  jak poznat, zda spolu slova $w$ a $w'$ souvisí?

  podle skalárního součinu $x$ a $x'$!

  ~ nesouvisející slova mají kolmé vektory

- **jakým způsobem**, které ze slov $w_1, \dots, w_i$ ovlivňuje $x_i$?
  … směrem

upřesňujeme reprezentaci slova $w_k$ - vektor $x_k$

$$x_1 \qquad x_2 \qquad \dots \qquad x_k$$

skalární součiny

$x_k$: $\langle x_k, x_1 \rangle \quad \langle x_k, x_2 \rangle \quad \dots \quad \langle x_k, x_k \rangle$ ← posloupnost čísel od $-\infty$ k $\infty$

normalizujeme tak, aby

- všechna čísla byla $\geq 0$
- součet $= 1$

} tzv. pravděpodobn. rozdělení na $x_1, \dots, x_k$

$$\alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad \dots \qquad \alpha_k$$

přejdeme od $x_k$ k $x_k' = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot x_i$

---

K čemu to je? použijeme odvozovací matici $W_u$:

$y = W_u \cdot x_k' \in \mathbb{R}^u$

$z = \mathrm{Normal}(y) \in \mathbb{R}^u$ normalizace: $\sum_{i=1}^{u} z_i = 1$, $\forall i: z_i \geq 0$

tj. $z$ je pravděpodobnostní rozdělení na $V$

$\Rightarrow$ slovo $w_{k+1}$ vybereme podle něj.

13/6

Model pracuje se třemi dalšími maticemi:

$W_K, W_Q, W_V \in \mathbb{R}^{d\times n}$, které pro každé

slovo ze slovníku uchovávají tři další vektory

⋮

---

Naznačené se vnitřně <u>opakuje</u> .

---

nebuďte jako ChatGPT - hodně ví, ale moc si nemyslí, nerozlišuje, co je pravda a co ne

- Myslete za sebe
- Ptejte se proč
- Hledejte pravdu - univerzita

---

Anketa