Připomenutí:

**Def:** Zobrazení $f: V \times V \to T$ se nazývá **bilineární forma na $V$**, pokud je lineární v obou složkách.

Zobrazení $g: V \to T$ se nazývá **kvadratickou formou**, pokud $\exists$ bilineární forma $f$ t.ž. $\forall u \in V$, $g(u) = f(u,u)$.

**Symetrická** bilineární forma: $\forall x,y \in V: f(x,y) = f(y,x)$

Platí (až na VP nad $\mathbb{Z}_2$):

i) Symetrická bilineární forma $f$ je jednoznačně určena hodnotami $f(u,u)$, $\forall u \in V$.

ii) Pro každou kvadr. formu $g$ existuje symetrická bilineární forma $f$ t.ž. $g(u) = f(u,u)$ $\forall u \in V$.

**Matice bilineární formy $f$ vzhledem k bázi $B = (b_1, \dots, b_n)$:**

$$A_{ij} = f(b_i, b_j) \leftarrow \text{jak se } f \text{ chová na bázi } B$$

**Matice kvadratické formy $g$ vzhledem k bázi $B$:** matice symetrické bilin. formy $f$ t.ž. $g(u) = f(u,u)$, pokud existuje.

**Pozorování 1:** Je-li $A$ matice bilineární formy $f$ vůči bázi $B$, pak $\forall u,v \in V$: $f(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$.

**Smysl:** každou bilineární formu (tedy i kvadratickou) můžeme reprezentovat pomocí matice.

**Opak** je zřejmý: pro každou čtvercovou matici $A \in T^{n \times n}$ a bázi $B$ VP $V$ nad $T$ určuje předpis $\forall u,v \in V$: $f(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$ bilin. formu na $V$.

Na okraj: Uvažme VP $V$ nad $T$ a nechť $F$ je množina všech bilin. forem na $V$. Pak $F$ je VP nad $T$. ($\sim$ VP všech matic $n \times n$)

Př. $A=\begin{pmatrix}1&5\\3&2\end{pmatrix}$   $f(x,y)=x^TAy$ ... bilin. forma na $\mathbb{R}^2$

$$g(x)=f(x,x)=x_1^2+5x_1x_2+3x_2x_1+2x_2^2=$$
$$=x_1^2+4x_1x_2+4x_2x_1+2x_2^2=f'(x,x)$$

Pro $A'=\begin{pmatrix}1&4\\4&2\end{pmatrix}$, $f'(x,y)=x^TA'y$ symetrická bilin. forma, která určuje $g$.

$A$ je také matice $f$ vůči kanonické bázi.
$A'$ — " — $f'$ — " —

(nebo kvadratické)

**Pozorování 2**: Nechť $A$ je matice bilin. formy $f$ vzhledem k bázi $B$. Pak ${}_B[id]_C^T\cdot A\cdot {}_B[id]_C$ je matice $f$ vůči bázi $C=(c_1,\dots,c_n)$.

matice přechodu od báze $C$ k bázi $B$

Důkaz: víme: $[u]_B={}_B[id]_C\cdot[u]_C$

$[v]_B={}_B[id]_C[v]_C$   $=:\bar{A}$

Pozorování 1

$$f(u,v)=[u]_B^T\cdot A\cdot[v]_B=[u]_C^T\boxed{{}_B[id]_C^T\,A\,{}_B[id]_C}\cdot[v]_C$$

$$\Rightarrow \forall i,j: f(c_i,c_j)=e_i^T\cdot\bar{A}\cdot e_j=\bar{A}_{ij}$$ ∎

Chtěli bychom bázi, vůči které bude matice formy pěkná – diagonální.

**Věta**: Nechť $f$ je symetrická bilineární forma na VP $V$ nad $T$, charakteristiky $\neq 2$. Pak existuje báze $B$ tž. matice $f$ vůči $B$ je diagonální.

Důkaz: Uvaž libovolnou bázi $B'$ a matici $A$ formy $f$ vůči $B'$. $A$ je symetrická. Pokud $A$ je reálná, pak už víme, že $\exists R$ tž. $R^T\cdot A\cdot R$ je diagonální.

jinak trochu pečlivěji

i-tý sloupec

Nechť $B=(b_1,\dots,b_n)$ je báze tž. ${}_{B'}[id]_B=R$, tj. $[b_i]_{B'}=R_{*i}$.

Pak podle Pozorování 2, ${}_{B'}[id]_B^T\,A\,{}_{B'}[id]_B$ je matice $f$ vůči $B$. □

Obecnější situace - symetrická matice $A \in T^{n\times n}$

Znovu využití Gaussovy eliminace a indukce.

Ukážeme **1.** $\exists$ matice $E$ t.ž.

$$E\cdot A\cdot E^T = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right),$$

kde $B$ je symetrická.

<u>Pozor</u>: $E$ nemusí být dolní $\triangle$

Pokud $A_{1*} = (\alpha\ 0 \cdots 0)^T$, stačí vzít $E = I$ a je hotovo.

Jinak rozlišíme dva případy

i. $A_{11} \neq 0$ - stačí EŘÚ typu 3 - přičti řádek 1 k řádku i

bud $E$ matice EŘÚ typu 3 která upraví $A$ do podoby

$$E\cdot A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & ?\,?\,? \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right)$$

Pak $E\cdot A\cdot E^T$ má požadovaný tvar.

ii. $A_{11} = 0$ - buď $E_+$ matice EŘÚ úpravy přičti řádek i k řádku 1 kde i je t.ž. $A_{i1} \neq 0$ (jistě existuje)

Pak $E_+\cdot A\cdot E_+^T$ je symetrická, s pozicí 1,1 nenulovou, (nejsme v $\mathbb{Z}_2$)

a podle bodu i existuje matice $E$ t.ž. $E\cdot E_+\cdot A\cdot E_+^T\cdot E^T$ je požadovaného tvaru.

**2.**

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & F \\ 0 & \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & F^T \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & F\cdot B\cdot F^T \\ 0 & \end{array}\right)$$

(1. semestr)

**3.** Celé tvrzení dostaneme indukcí:

- pro $n = 1$ jasné
- $n \to n+1$ : Podle bodu 1. $\exists$ $E$ t.ž. $E\cdot A\cdot E^T = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$

Podle ind. předp. $\exists$ $F$ t.ž. $F\cdot B\cdot F^T$ je <u>diagonální</u>

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & F \\ 0 & \end{array}\right) E\cdot A\cdot E^T\cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & F^T \\ 0 & \end{array}\right) \overset{1.}{=} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & F \\ 0 & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & F^T \\ 0 & \end{array}\right) \overset{2.}{=} \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & FBF^T \\ 0 & \end{array}\right)$$

$\square$

<u>Pozor</u>: na diagonále nemusí být vlastní čísla!

**Důsledek** (Sylvestrův zákon setrvačnosti kvadratických forem)

Pro každou kvadratickou formu $g$ na VP konečné dim. nad $\mathbb{R}$ existuje báze, vůči níž má $g$ diagonální matici pouze s $0, 1, -1$. Navíc počet $1$ a počet $-1$ je pro každou takovou bázi stejný.

**Důkaz**: Nechť $f$ je symetrická bilin. forma určující $g$, tedy $\forall v \in V$, $g(v) = f(v,v)$.

Dle předešlé věty existuje báze $B$ t.ž. matice $f$ vůči $B$ je diagonální - ozn. $D$

Nechť $S$ a $D'$ jsou diagonální matice definované takto: pro $i$ t.ž. $D_{ii} = 0$ : $S_{ii} = 1$, $D'_{ii} = 0$

— " — $D_{ii} > 0$ : $S_{ii} = \sqrt{D_{ii}}$, $D'_{ii} = 1$

— " — $D_{ii} < 0$ : $S_{ii} = \sqrt{-D_{ii}}$, $D'_{ii} = -1$

Pak $D = S^T \cdot D' \cdot S$, a protože $S$ je regulární, $D' = (S^T)^{-1} \cdot D \cdot S^{-1}$ je diagonální matice pouze s $0, 1, -1$, a z konstrukce je to matice kvadratické formy $g$ vůči nějaké bázi.

Jednoznačnost počtu $0, 1, -1$:

Nechť $D$ a $D'$ jsou matice kvadr. formy $g$ vůči dvěma různým bázím - $B, C$. Pak $[id]_{BC}^T \cdot D \cdot [id]_{BC} = D'$ (regulární)

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A') \Rightarrow$ stejný počet $0$.

Označme $B = (b_1, \dots, b_n)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$

Jsou v $D$ i $D'$ jsou na diagonále nejprve $+1$, pak $-1$, pak $0$.
(permutují vektory v bázích)

$p \dots \# 1$ v $D$
$q \dots \# 1$ v $D'$ } Pro spor předpokládejme $q < p$.

Nechť $P = \mathcal{L}(\{b_1, \dots, b_p\})$ - lineární obal $b_1, \dots, b_p$

$Q = \mathcal{L}(\{c_{q+1}, \dots, c_n\})$.

Protože $\dim(P) + \dim(Q) = p + n - q > n$,

existuje $v \in P \cap Q$:

$$\Rightarrow \quad v = \sum_{i=1}^{p} \beta_i b_i = \sum_{j=q+1}^{n} \gamma_j c_j \,, \text{ pro vhodná } \beta_i, \gamma_j$$

Pak ale: $g(v) = [v]_B^T \cdot D \cdot [v]_B = \sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 > 0$ $\Big\}$ spor

$= [v]_C^T \cdot D' \cdot [v]_C = \sum_{j=q+1}^{n} (-1) \cdot \gamma_j^2 \le 0$

$\Rightarrow q \geq p$. Symetricky dostaneme $p \geq q \Rightarrow p = q$ ∎

**Příklad:** nechť $g(x) = x^T A x$, pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Najdeme rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & -1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & -1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Pak pro

$S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{3} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ máme $D = S^T D' S$.

---

**Důsledek:** v $\mathbb{R}^2$ existuje 6 typů kvadratických forem:

- klasifikace podle jejich diagonální matice s $0, 1, -1$:

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

v $\mathbb{R}^1$ jen 3 typy:

$(1)$ $\quad$ $(-1)$ $\quad$ $(0)$