Připomeňme:

Věta (Rekurentní podmínka).
Matice $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline a & B \end{array}\right)$ je pozitivně definitní, právě když: $\alpha > 0$ a matice $B - \frac{aa^T}{\alpha}$ je pozitivně definitní.

Důsledek 1 (Gaussova eliminace jako test na PDF).
Matice A je pozitivně definitní právě když je Gaussova eliminace používající pouze ERÚ
přičti t-násobek řádku j k řádku i, $j < i$ (*)
převede do odstupňovaného tvaru s kladnou diagonálou.

Důsledek 2 (Výpočet Choleského rozkladu Gauss. eliminací).
Nechť A je pozitivně definitní matice a $\bar{U}$ její odstupňovaný tvar získaný Gaussovou eliminací pouze pomocí ERÚ (*).
Označme D diagonální matici t.ž. $D_{ii} = \bar{U}_{ii}$, $\forall i = 1, \dots, n$,
a nechť $U = D^{-1} \cdot \bar{U}$. Pak $A = U^T D \cdot U$ a D má kladnou diag.
Pozn: při označení $R^T = U^T \sqrt{D}$ máme $A = R^T R$, kde R je horní trojúhelníková, a protože podle Důsledku 1 má $\bar{U}$ kladnou diagonálu, a D také, má R kladnou diag. – tj. jde o Choleského rozklad.

Důkaz: nechť E je matice pouze ERÚ (*) t.ž. $EA = \bar{U}$.
Víme: • $EAE^T = D$ ← diagonální kladná (např. důkaz Sylvestr. podmínky)

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = E^{-1} D (E^T)^{-1} \\ (E^T)^{-1} = D^{-1} \cdot E \cdot A = D^{-1} \cdot \bar{U} = U \end{array}\right\} \Rightarrow A = U^T \cdot D \cdot U, \text{ kde } D$$
má kladnou diag.

volba E — definice D a $\bar{U}$

∎

METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

(doplnění k ortogonalitě / skalárnímu součinu)

uvažme neřešitelnou soustavu $Ax=b$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

chceme najít x, které soustavu poruší co nejméně

co to znamená?

Připomeňme možnou interpretaci $Ax=b$: hledáme lineární kombinaci sloupců matice A, která dá b.

Označme $W=\mathcal{S}(A)$ - sloupcový prostor A.

Pokud $Ax=b$ nemá řešení - b nepatří do W.

Nápad: spočteme projekci $p_W(b)$ vektoru b do W, a řešme $Ax=p_W(b)$.

Pak
- jistě existuje řešení - ozn. $\bar{x}$
- navíc $\|A\bar{x}-b\| = \|p_W(b)-b\| = \min\limits_{y\in W}\|y-b\| = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-b\|$

tj. $\bar{x}$ je takové, že vzdálenost $A\bar{x}$ a b je nejmenší možná

↑ to jsme chtěli.

Všimni si: díky monotonosti druhé mocniny, úlohy

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-b\| \quad \text{a} \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-b\|^2 = \underbrace{\min_{x\in\mathbb{R}}\sum_i (A_{i*}x-b_i)^2}_{\text{nejmenší čtverce}}$$

mají stejné optimum.

Označme $\mathcal{O}$ množinu nejlepších přibližných řešení $Ax=b$.

Platí: $\mathcal{O}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid A^TAx=A^Tb\}$.

Důkaz: uvaž x tž. $Ax=p_W(b)$.

Pak víme: $(b-p_W(b))\perp W=\mathcal{S}(A)=\mathcal{R}(A^T) \iff$

$\iff b-p_W(b)\in Ker(A^T) \iff b-Ax\in Ker(A^T) \iff$

$\iff A^T(b-Ax)=0 \iff A^TAx=A^Tb$. ∎

Důsledek: způsob řešení.

BILINEÁRNÍ A KUADRATICKÉ FORMY

Připomeňme si: skalární součin je zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (VP, T) s nějakými vlastnostmi (L, P, K). Lze vyjádřit předpisem $\langle x|y\rangle = x^T A y$, kde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivně def. matice

---

Nechť V je VP nad T.

Def: Zobrazení $f: V\times V \to T$, které dvojici vektorů $x,y \in V$ přiřazuje skalár $f(u,v)$ se nazývá **bilineární forma na V**, pokud splňuje následující axiomy:

(L1) $\forall x,y,z \in V, \forall t \in T: f(x+t\cdot y, z) = f(x,z) + t\cdot f(y,z)$

(L2) — " — $: f(x, y+t\cdot z) = f(x,y) + t\cdot f(x,z)$

Zobrazení $g: V\to T$ se nazývá **kvadratickou formou**, pokud pro nějakou bilineární formu f platí: $\forall u \in V,\ g(u) = f(u,u)$.

Bilineární forma f je **symetrická**, pokud $\forall x,y \in V: f(x,y) = f(y,x)$.

Věta: S výjimkou těles charakteristiky 2 platí:

i) Symetrická bilineární forma f na VP V nad T, jednoznačně určena hodnotami $f(u,u)$, $\forall u \in V$.

ii) Je-li g kvadr. forma na VP V nad T, pak existuje symetrická bilineární forma f' tž. $g(u) = f'(u,u)\ \forall u \in V$.

Důkaz: i) Uvaž libovolné $u,v \in V$. Pak

$$f(u+v, u+v) \overset{L1,L2}{=} f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v)$$

$$\Rightarrow f(u,v) + f(v,u) = \underbrace{f(u+v,u+v) - f(u,u) - f(v,v)}_{*}$$

$$\Rightarrow f(u,v) = \tfrac{1}{2}\big(f(u,v) + f(v,u)\big) = \tfrac{1}{2}\big(f(u+v,u+v) - f(u,u) - f(v,v)\big)$$

ii) Nechť $f'(u,v) = \frac{1}{2}\big(f(u,v) + f(v,u)\big)$, kde f určuje g. Pak • f' je symetrická, • $g(u) = f'(u,u)$, $\forall u \in V$.

Pozn. v $\mathbb{Z}_2$ je (*) rovna $2\cdot f(u,v) = 0 \to f(u,v)$ nevyjádříme.

Def: Nechť $B = (b_1, \dots, b_n)$ je báze VP V nad T.
Matice bilineární formy f vzhledem k bázi B je matice A daná předpisem: $A_{ij} = f(b_i, b_j)$. jak se chová báze

Matice kvadratické formy g vzhledem k bázi B je daná matice symetrické bilin. formy f t.ž. $g(u) = f(u,u)$, $\forall u \in V$, pokud taková f existuje.

Pozn. 1 uvaž bilineární formu f na VP $\mathbb{Z}_2^2$ nad $\mathbb{Z}_2$, jejíž matice vůči kanonické bázi je $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, a kvadratickou formu $g(u) = f(u,u)$.
Pak pro g neexistuje symetrická bilin. forma –
DÚ - rozmyslete si.

Pozn. 2 Vzhledem jednoznačnosti symetrické bilin. formy určující g (viz minulá věta), je definice korektní.

Je-li f bilineární forma na VP V nad tělesem T jiné charakteristiky než 2, a A její matice vzhledem k bázi $B = (b_1, \dots, b_n)$, pak matice C kvadr. formy $g(u) = f(u,u)$ vzhledem k B je dána předpisem

$$C_{ij} = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2}.$$

Dk: Už víme z předešlého důkazu, že symetrická bilin. forma f' určující kvadratickou formu g je dána vztahem $f'(u,v) = \frac{f(u,v) + f(v,u)}{2}$, $\forall u, v \in V$,

proto $C_{ij} = f'(b_i, b_j) = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2}$. ∎

Pozorování 1: Je-li A matice bilineární formy f vůči bázi B, pak $\forall u,v \in V$: $f(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$.

Důkaz: Označme $B = (b_1, \dots, b_n)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ tž. $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$.

Pak $f(u,v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j\right) \overset{L1,2}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(b_i, b_j) =$

$= [u]_B^T \cdot A [v]_B$.