# POZITIVNĚ DEFINITNÍ MATICE - opak.



19:24

**Def:** Symetrická reálná matice $A$, $n \times n$, je

**pozitivně definitní**, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $x^T A x > 0$.

**pozitivně semidefinitní**, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $x^T A x \geq 0$.

**Věta** (Charakterizace pozitivně definitních matic)

Pro čtvercovou symetrickou matici $A$ jsou následující podmínky ekvivalentní.

i) $A$ je pozitivně definitní,

ii) všechna vlastní čísla $A$ jsou kladná, $\Rightarrow \det(A) > 0$ regulární

iii) existuje regulární matice $U$ t.ž. $A = U^T U$,

iv) existuje regul. horní trojúhel. $R$ s kladnou diagonálou t.ž. $A = R^T R$. tzv. Choleského dekompozice „Šoleského"

(připomenout si Gauss. elim. ERÚ a jejich matice)

## Malá pozorování:

**Př. 1**: Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a $R$ je regulární matice, $n \times n$.

Pak $A$ je pozitivně definitní $\Leftrightarrow$ $R^T A R$ je pozit. def.

**dk.** např. důkaz bodu iii)

$A$ je PDF $\Leftrightarrow \exists$ regul. $U$ t.ž. $A = U^T U \Leftrightarrow \exists$ reg. $U$ t.ž. $R^T A R = R^T U^T U R$

$\Leftrightarrow R^T A R$ je PDF. $\blacksquare$

**Př. 2**: Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je tvaru $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Pak $A$ je pozitivně definitní $\Leftrightarrow \alpha > 0$ a zároveň $B$ je poz. def.

**dk.** $\Rightarrow$ uvaž $x = (1, 0, \dots, 0)^T$: $0 < x^T A x = \alpha$

pro libovolné $x \in \mathbb{R}^{n-1}, x \neq 0$: $x^T B x = (0, x^T) A \binom{0}{x} > 0$

$\Leftarrow$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $x^T A x = x_1^2 \alpha + \tilde{x}^T B \tilde{x} > 0$

kde $\tilde{x} = (x_2, \dots, x_n)$. $\Downarrow$ $x_1 \neq 0$ nebo $\tilde{x} \neq 0$ $\blacksquare$

**Věta** (Sylvestrova podmínka).
Symetrická matice $A$, $n\times n$, je positivně definitní, právě když pro každé $i=1,\dots,n$, $\det A_i > 0$, kde $A_i$ je podmatice $A$ z prvních $i$ řádků a sloupců.


Důkaz $\Rightarrow$ všimni si: $\forall i$, $\forall x \in \mathbb{R}^i$, $x^T A_i x > 0$
(protože dle předpokladu pro $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $0 < \bar{x}^T A \bar{x} = x^T A_i x$) $\Rightarrow \forall i$, $A_i$ je positivně def.
$\Rightarrow \det(A_i) > 0$.

$\Leftarrow$ Uvaž úpravy $A$ do odstup. tvaru pomocí Gaussovy eliminace. Důkaz cíle: a) ukázat, že vystačíme s elem. řádkovými úpravami typu

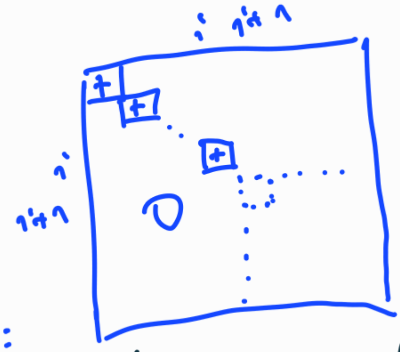
přičti $t$-násobek řádku $j$ k řádku $i$, $j < i$ (*)

b) ukázat, že výsledná matice v odstupňovaném tvaru, označme ji $U$, má kladnou diagonálu.

ukážeme oboje najednou indukcí:

$i=1$: $U_{11} = A_{11} > 0$, a $U$ je rovnou v odstupňovaném tvaru

ind. krok $i \to i+1$: protože naše ERÚ nemění determinant, platí:




$$0 < \det(A_{i+1}) = \det(U_{i+1}) = \underbrace{\prod_{j=1}^{i} U_{jj}}_{>0 \text{ dle ind. předp.}} \cdot U_{i+1,i+1} \Rightarrow U_{i+1,i+1} > 0$$

$\Rightarrow$ při nulování prvků pod $U_{i+1,i+1}$ stačí ERÚ (*) s 1 na diagonále

Nechť $E$ označuje dolní troj. matici odpovídající ERÚ, tj. $E\cdot A = U$. Nechť $D = E\cdot A\cdot E^T \Rightarrow D^T = E\cdot A\cdot E^T$

Protože: $D$ je horní troj. ($\underbrace{E\cdot A}_{\text{horní}} \cdot \underbrace{E^T}_{\text{horní}}$)
& $D$ je symetrická $\Big\} \Rightarrow D$ je diagonální.

Protože $EA$ a $D = EAE^T$ mají stejné diagonály, $D$ má kladnou diag.

Při označení $L = E^{-1}$ a $R = L^T \cdot \sqrt{D}$ máme (jisté $L$ - kladná diag.)
$$A = E^{-1} D (E^T)^{-1} = LDL^T = R^T R.$$

**Věta** (Rekurentní podmínka na PDF).

Matice $A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline a & B \end{array}\right)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$, $B \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$,

je pozitivně definitní právě když $B - \frac{a}{\alpha} a^T$ je pozitivně def.

**Důkaz**: Nechť $E$ je matice posloupnosti ERÚ typu přičti $t$-násobek řádku $j$ k řádku $i$, $j < i$, která vynuluje sloupec pod $A_{11} = \alpha$: $E \cdot A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & ? \\ 0 & \end{array}\right)$

Zajímá nás: co se stane s $B$, resp. co budou ERÚ dělat?

uvažme $i$-tý řádek $A$: $(a_{i-1} \quad B_{i-1*})$ ← řádek $i-1$ matice $B$

přičteme k němu $\left(-\frac{a_{i-1}}{\alpha}\right)$-násobek 1. řádku $(\alpha, a^T)$

neboli k matici $B$ přičítáme matici $-\frac{a}{\alpha} \cdot a^T$

∴ tj. sloupce $2, \dots, n$ matice $A$

$$\Rightarrow E \cdot A = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & B - \frac{a}{\alpha} a^T \\ 0 & \end{array}\right) \quad \text{a} \quad E = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -\frac{a_1}{\alpha} & 1 & & & \\ -\frac{a_2}{\alpha} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n-1}}{\alpha} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow E \cdot A \cdot E^T = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & \underline{B - \frac{a}{\alpha} a^T} \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & -a^T/\alpha & \\ \hline 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \underline{B - \frac{a}{\alpha} a^T} \\ 0 & \end{array}\right)$$

tato část je stejná

Podle 1 a 2: $A$ je PDF $\Leftrightarrow$ $EAE^T$ je PDF $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$ & $B - \frac{a}{\alpha} a^T$ je PDF. ∎

**Důsledek 1** (Gaussova eliminace jako test na PDF).

Matice $A$ je pozitivně definitní právě když ji Gaussova eliminace používající pouze ERÚ přičti $t$-násobek řádku $j$ k řádku $i$, $j < i$ převede do odstupňovaného tvaru s kladnou diagonálou.

**Důkaz**: indukcí podle velikosti matice

$n = 1$ · víme: $A$ je PDF $\Leftrightarrow \det(A) > 0$ ✓ ($= A_{11}$)

$n-1 \to n$ : nechť $E$ je jako v předešlém důkazu.

Dle věty platí: $A$ je PDF $\Leftrightarrow \alpha > 0$ & $B - \frac{a}{\alpha} a^T$ je PDF

Dle ind. předp. $\Leftrightarrow \alpha > 0$ & Gauss. eliminace převede $B - \frac{a}{\alpha} a^T$ do odst. tvaru s kladnou diag.

$\Leftrightarrow$ Gauss. eliminace převede $A$ do .... ☒

**Důsledek 2** (Výpočet Choleskeho rozkladu Gauss. eliminací).

Nechť $A$ je pozitivně definitní matice a $\bar{U}$ její odstupňovaný tvar získaný Gaussovou eliminací pouze ERÚ přičti $t$-násobek řádku $j$ k řádku $i$, $j < i$. (*)

Označme $D$ diagonální matici t.ž. $D_{ii} = \bar{U}_{ii}$, $\forall i = 1, \dots, n$. a nechť $U = D^{-1} \cdot \bar{U}$. Pak $A = U^T D \cdot U$ a $D$ má kladnou diag.

**Důkaz**: nechť $E$ je matice pouze ERÚ (*) t.ž. $EA = \underline{\bar{U}}$.

Víme: · $EAE^T = D$, kde $D$ je diagonální kladná (např. důkaz Sylvestr. podmínky)

· $\overbrace{EA}^{=\bar{U}}$ a $D$ mají stejnou diagonálu.

$A = E^{-1} D (E^T)^{-1} \Rightarrow \underbrace{(E^T)^{-1} = D^{-1} E \cdot A = D^{-1} \cdot \bar{U} = U}$ $\Rightarrow A = U^T \cdot D \cdot U$

Protože $D$ má kladnou diagonálu, máme i Choleskeho rozklad: pro $R^T = U^T \sqrt{D}$ platí: $A = R^T \cdot R$ a $R$ je horní trojúhelníková s kladnou diag.

(Obě $U$ i $D$ mají kladnou diag.) ☒

**Příklad**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

Gaussova eliminace:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 18 \end{pmatrix} \sim \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{pmatrix}}^{\bar{U}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 11/2 \end{pmatrix}}^{D} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{U}$$

kontrola

$$U^T D U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 20 \end{pmatrix} = A.$$