DETERMINANTY

LA 2 $\boxed{19/12/2024}$

Organizační:
- díky za anketu!
- v létě bude ještě zkouška z LA 1
- anketa: špatná čitelnost → upozorněte
- včas řešte těžkosti
- poznámky na webu

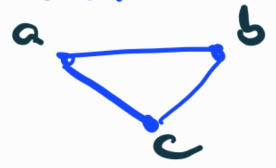
Navazujeme na LA1! – permutace
– soustavy lin. rovnic (el. úpravy)
– matice – regulární, singulární
– VP, báze, souřadnice
– lineární zobrazení

Dva důležité pohledy na matice. Oba potřebné.

1. statický: nehybná věc - data (slon vs. forma)

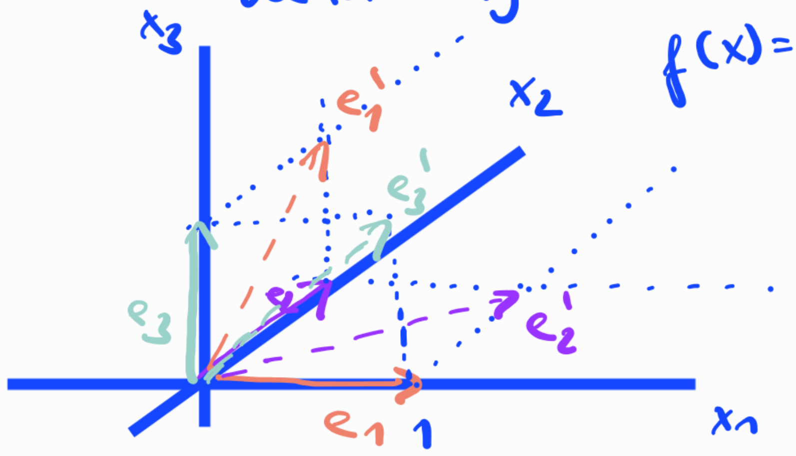
např.
$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \hline & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \end{array}$$

– hezký minimalistický obrázek
– reprezentace grafu – matice sousednosti



2. dynamický: zařízení, které něco dělá – tj. lineární zobrazení

$f(x) = Ax$

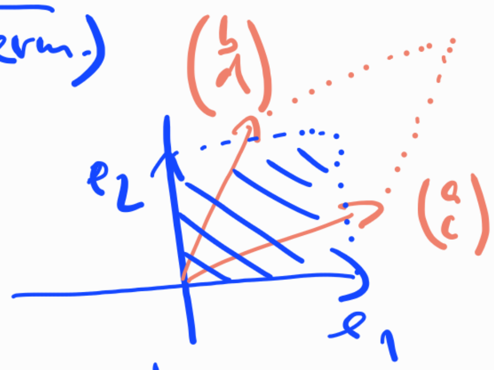


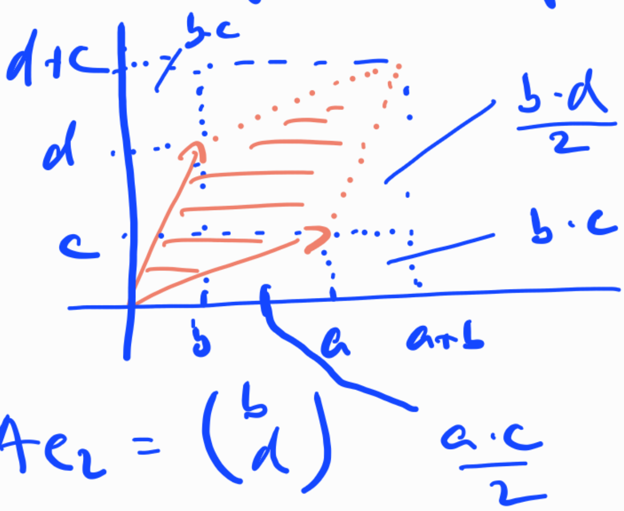
$e_1' = A e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_2' = A e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_3' = A e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Motivace 1: Uvaž lineární zobrazení $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=Ax$.
(k determ.)





$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A\cdot e_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ $\quad Ae_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

f udělá z čtverce rovnoběžník.

Plocha rovnoběžníku:

$$(a+b)(c+d) - 2\cdot bc - ac - bd$$

$$= \cancel{ac} + bc + ad + \cancel{bd} - 2bc - \cancel{ac} - \cancel{bd}$$

$$= ad - bc$$

Původní plocha čtverce: 1 $\Rightarrow$ tj. plocha se zvětší $(ad-bc)$-krát

---

Motivace 2: Uvaž soustavu $Ax=b$.

Zajímá nás, kdy má !1 řešení. Búno $a\neq 0$ (umíme Gaus. eliminaci - teď chceme formuli, nejen postup)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Je-li $ad-bc\neq 0$, pak !1 řešení.

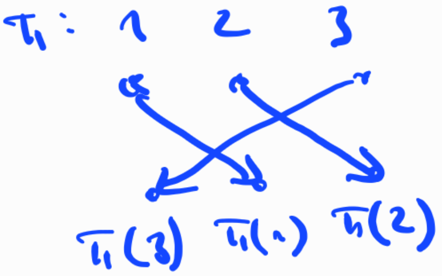
(Pro $a=0$ potřebujeme $bc\neq 0$, tj. stejná podmínka)

V obou případech jsme od matice A došli ke stejnému číslu, totiž $ad-bc$, závisejícímu na jejích složkách, které cosi důležitého o A vyjadřuje.

Připomeňme:

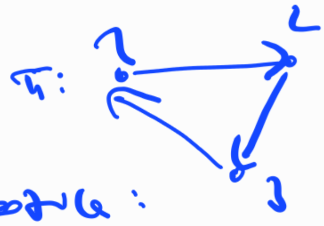
permutace $\{1,\dots,n\}$ je bijekce

$\pi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$



znaménko permutace

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{\#\text{inverzí}} = (-1)^{n-\#\text{cyklů}}$$
$$= (-1)^{\#\text{transpozic}}$$



transpozice:

$$t_{ij}(k) = \begin{cases} i & k=j \\ j & k=i \\ k & k\neq i,j \end{cases}$$

Př: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $t_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\pi = t_{12} \circ t_{23}$ $\quad t_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2 křížení   1 cyklus   2 transpozice

$$\operatorname{sgn}(\pi) = -1^{2} = -1^{3-1} = -1^{2} = 1$$

Platí: i) $\operatorname{sgn}(p \circ q) = \operatorname{sgn}(p)\cdot\operatorname{sgn}(q)$,

ii) $\operatorname{sgn}(p^{-1}) = \operatorname{sgn}(p)$.

Všimněme si:

Pro $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, typu 2×2 $(n=2)$, jsme

došli k výrazu $a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$

- sčítáme součiny typu $\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$ neútočící věže na šachovnici

↓

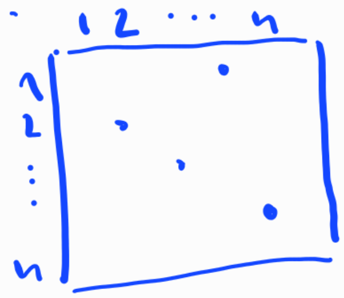
přes všechny permutace $\pi \in S_n$, vhodně násobené ± 1, dle $\operatorname{sgn}(\pi)$

Definice: **Determinant** čtvercové matice $A \in T^{n\times n}$ je číslo

$$\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}.$$

• Pro trojúhelníkovou matici (dolní i horní) A platí: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ – součin diagonál. prvků.

Tvrzení: $\det(A) = \det(A^T)$



$j = \pi(i) \iff \pi^{-1}(j) = i$

Důkaz: všimneme si, že pro každou permutaci $\pi \in S_n$ platí:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j),j}$$

Protože $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1})$, dostaneme

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} = \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j),j}$$

$$= \sum_{\pi' \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi') \sum_{j=1}^{n} A^T_{j,\pi'(j)} = \det(A^T) \qquad \blacksquare$$

↑ označme $\pi' := \pi^{-1}$

Věta:

i) Je-li $A = \begin{pmatrix} - v_1 - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix} \in T^{n\times n}$ (matice), $z^T \in T^n$ (vektor), $\alpha, \beta \in T$ (skaláry),

pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\det\begin{pmatrix} - v_1 - \\ \vdots \\ - \alpha v_i + \beta z - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det(A) + \beta \cdot \det\begin{pmatrix} - v_1 - \\ \vdots \\ - z - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-tý řádek}$$

(tj. determinant je lineární funkcí každého svého řádku, a díky předešlému tvrzení i sloupce)

ii) Je-li A' matice vzniklá z A prohozením dvou řádků, pak $\det(A') = -\det(A)$.

iii) $\det(I) = 1$.

Důkaz: i) označme a_{ij} j-tý prvek řádku i matice A

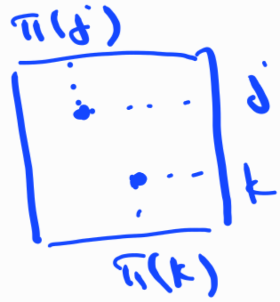
podle definice det je levá strana rovnosti rovna

$$\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdots(\alpha a_{i\pi(i)}+\beta z_{\pi(i)})\cdots a_{n\pi(n)} =$$

$$= \alpha \underbrace{\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}}_{=\det(A)} +$$

$$\beta \underbrace{\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)}\cdots z_{\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}}_{=\det\begin{pmatrix} - & r_1 & - \\ & \vdots & \\ - & z & - \\ & \vdots & \\ - & r_n & - \end{pmatrix}}$$

ii) Nechť $j \neq k$ jsou indexy prohozených řádků, t je transpozice $t(j)=k$, $t(k)=j$, $t(i)=i$ pro $i\neq j,k$,



Pak $$\det(A') = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i(\pi\circ t)(i)}$$

$$= \sum_{(\pi\circ t)\in S_n} -\operatorname{sgn}(\pi\circ t) \prod_{i=1}^{n} a_{i(\pi\circ t)(i)}$$

$$= -\det(A)$$

iii) to už víme – I je zvláštní případ trojúhelníkové matice. ∎