Dokončení důkazu charakterizace bipartitních grafů pomocí vlastních čísel

JORDANOVA NORMÁLNÍ FORMA

Už víme: ne každá matice je diagonalizovatelná, např. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ← pouze $\lambda=1$

(kdyby byla, tak $\exists R$ $RIR^{-1} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ – spor) ← neplatí

ZAJÍMÁ NÁS: jak moc blízko k diagonální matici je možné se dostat.

Def: **Jordanův blok** (buňka) $J_k(\lambda)$ **řádu k** je matice

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$$

(tj. na diagonále λ, těsně nad ní samé 1)

💡 vlastní číslo $J_k(\lambda)$ je jediné, totiž λ.

Def: Matice J je v **Jordanově normálním tvaru**, má-li podobu

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & 0\\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \boxed{J_3} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{J_m}\end{pmatrix}$$

kde každé $J_i = J_{k_i}(\lambda_i)$ je Jordanův blok.

Čísla λ_i nemusí být navzájem různá.

Věta (o Jordanově normální formě):
Každá čtvercová komplexní matice je podobná matici v Jordanově norm. tvaru. Až na pořadí bloků je tvar jednoznačně určen.

bez důkazu.

POZITIVNĚ DEFINITNÍ MATICE

Def: Symetrická reálná matice A, $n \times n$, je
pozitivně definitní, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $x^T A x > 0$.
pozitivně semidefinitní, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $x^T A x \geq 0$.

Věta (Charakterizace pozitivně definitních matic)
Pro čtvercovou symetrickou matici A jsou následující podmínky ekvivalentní.
i) A je pozitivně definitní,
ii) všechna vlastní čísla A jsou kladná,
iii) existuje regulární matice U t.ž. $A = U^T U$,
iv) existuje regul. horní trojúhel. R s kladnou diagonálou t.ž. $A = R^T R$. tzv. Choleského (čti: „Šoleského") dekompozice

Důkaz: i) ⇒ ii)
uvaž libovolné vl. číslo λ: $Au = \lambda u$, pro vhodné u
$$0 < u^T A u = u^T \lambda u = \lambda (u^T u) \quad {>0} \Rightarrow \lambda > 0 \quad \square$$

ii) ⇒ iii)
Víme: každá reálná symetrická matice je diagonalizovatelná pomocí ortogonální matice,
tj. $\exists$ ortogonální mat. B a diagonální D t.ž. $A = B^T D B$,
a D má na diagonále vlastní čísla A
$\Rightarrow$ pro $U = \sqrt{D} \cdot B$, $A = U^T \cdot U$, kde $(\sqrt{D})_{ii} = \sqrt{D_{ii}}$ $\square$

iii ⇒ iv)
Víme: každá regulární matice U má tzv. QR rozklad,
tj. pro U existuje ortogonální Q a horní trojú. R s kladnou diag. t.ž. $U = Q \cdot R \Rightarrow A = U^T U = R^T \underbrace{Q^T Q}_{= I} R = R^T \cdot R$. $\square$

iv) ⇒ i) $x^T A x = x^T R^T \underbrace{Rx}_{\neq 0} > 0$ $\square$

Důsledek: Je-li A pozitivně definitní, pak $\det(A) > 0$.
dk: víme, že det je součin vl. čísel.

Pozn. 1: obdobné tvrzení platí pro pozitivně semidefinitní.

Pozn. 2: Pozitivně definitní matice jsou dnes velmi důležité v OPTIMALIZACI (např. MAX CUT)

Pozn. 3: Matice R z bodu (iv) je určena jednoznačně.
[důkaz nebyl na přednášce]

Dk: $A = R^T R = P^T P$, R, P – horní troj. matice s kladnou diagonálou

$$\underbrace{\underbrace{RP^{-1}}_{\text{obě horní }\Delta}}_{\text{výsledek horní }\Delta} = \underbrace{\underbrace{(R^T)^{-1} P^T}_{\text{obě dolní }\Delta}}_{\text{dolní }\Delta} \Rightarrow \text{diagonální}$$

Tedy: $\underline{RP^{-1} = D} = \underbrace{(R^T)^{-1} P^T}$ D je symetrická

tj. $R = D \cdot P$

$$\underline{D^{-1}} = (P^T)^{-1} \cdot R^T = \underline{RP^{-1}}$$

$\Rightarrow D = D^{-1}$, tj. D má na diagonále jen ± 1.

Kdyby $\exists i$ t.ž. $D_{ii} = -1$, tedy $R_{ii} = -P_{ii}$ – spor s tím, že obě matice P a D mají kladnou diag.

$\Longrightarrow \forall i,\ D_{ii} = 1$, tj. $D = I$. Proto $\underline{R} = DP = \underline{P}$. ■

Příklad: pro bázi $(b_1, \dots, b_n)$ VP V se skalárním součinem (nad $\mathbb{R}$), Gramova matice $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je dána předpisem
$$G_{ij} = \langle b_i | b_j \rangle.$$

Platí: G je pozitivně definitní.

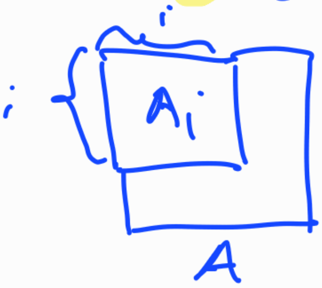
dk: pro $x \neq 0$:
$$x^T G x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle b_i | b_j \rangle x_i x_j \overset{\text{linearita sk. součinu}}{=}$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i b_i | x_j b_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i b_i | \sum_{j=1}^n x_j b_j \rangle = \langle \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i b_i}_{\neq 0} | \underbrace{\sum_{j=1}^n x_j b_j}_{\neq 0 \text{ b. báze } x \neq 0} \rangle > 0$$ ■

Platí: Je-li A pozitivně definitní matice, pak $\langle x | y \rangle = x^T A y$ je skalární součin. Dk. cvičení

Smysl: těsná souvislost mezi skal. souč. a posit. def. maticemi.

TESTOVÁNÍ POZITIVNÍ DEFINITNOSTI

Věta (Sylvestrova podmínka).
Symetrická matice A, $n \times n$, je pozitivně definitní, právě když pro každé $i = 1, \dots, n$, $\det A_i > 0$,
kde A_i je podmatice A z prvních i řádků a sloupců.



Důkaz $\Rightarrow$ všimni si: $\forall i, \forall x \in \mathbb{R}^i, x^T A_i x > 0$
(protože dle předpokladu pro $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,
$0 < \bar{x}^T A \bar{x} = x^T A_i x$) $\Rightarrow \forall i, A_i$ je pozitivně def.
$\Rightarrow \det(A_i) > 0$.

$\Leftarrow$ Uvaž úpravy A do odstup. tvaru pomocí Gaussovy eliminace. Dílčí cíle: a) ukázat, že vystačíme s elem. řádkovými úpravami typu (vzpomeň: matice těchto EŘÚ je dolní $\triangle$ s 1 na diagon.)
přičti t-násobek řádku j k řádku i, $j < i$ (*)

b) ukázat, že výsledná matice v odstupňovaném tvaru, označme ji U, má kladnou diagonálu.

ukážeme obojí najednou indukcí podle i - počet upravených sloupců

$i=1$: $A_{11} = \det(A_1) > 0 \Rightarrow$ vystačíme s EŘÚ (*)
$U_{11} = A_{11} > 0$ ✓

ind. krok $i \to i+1$: protože naše předpoklad EŘÚ nemění determinant platí:

$$0 < \det(A_{i+1}) = \det(\underbrace{U_{i+1}}_{\text{podmatice } U}) = \underbrace{\prod_{j=1}^{i} U_{jj}}_{>0 \text{ dle ind. předp.}} \cdot U_{i+1,i+1} \Rightarrow U_{i+1,i+1} > 0$$

$\Rightarrow$ při nulování prvků pod $U_{i+1,i+1}$ stačí EŘÚ (*) s 1 na diagonále

---

Nechť E označuje dolní troj. matici odpovídající EŘÚ, tj. $E \cdot A = U$. Nechť $D = \underbrace{E \cdot A}_{\text{horní}} \cdot \underbrace{E^T}_{\text{horní}} \Rightarrow D^T = E \cdot A \cdot E^T$ tj. $D = D^T$

Protože: D je horní troj. & D je symetrická $\Big\} \Rightarrow D$ je diagonální

Protože EA a $D = EAE^T$ mají stejné diagonály, D má kladnou diag.

Při označení $L = E^{-1}$ a $R = \sqrt{D} \cdot L^T$ máme (jistě L - kladná diag)

$$A = E^{-1} D (E^T)^{-1} = LDL^T = R^T R. \qquad \blacksquare$$