Víme: $A \in T^{n\times n}$ je diag. $\iff \exists$ báze T^n z vl. vek. A. LA 2 $\boxed{16/4/2025}$

Věta: Matice $A \in T^{n\times n}$ je diagonalizovatelná, právě když i) součet algebraických násobností vl. čísel je n,

a ii) geometrická násobnost každého vl. čísla je

Dokončení rovna jeho algebraické násobnosti:

důk. $\Leftarrow$ Předpokládejme, že A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; označme $r_1, \dots, r_k$ jejich algebraické násobnosti.

Označme $b_1^i, \dots, b_{r_i}^i$ LN vlastní vektory k vl. č. λ_i.

Chceme nahlédnout, že $b_1^1, \dots, b_1^{r_1}, \dots, b_k^1, \dots, b_k^{r_k}$ jsou lineárně nezávislé - tak máme bázi, protože $\sum_{i=1}^{k} r_i = n$.

(víme: A diagonalizovatelná $\iff \exists$ báze z vlastních vek.)

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 \cdots b_k^{r_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^1 \cdots b_k^{r_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1}^{r_1} & & \overbrace{}^{r_k} \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Sporem: kdyby byly LZ, $\exists$ koeficienty α_i^j, ne všechny nulové,

t.ž. $\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\left(\alpha_i^1 \cdot b_i^1 + \dots + \alpha_i^{r_i} \cdot b_i^{r_i} \right)}_{\text{ozn. } w_i} = 0$ (*)

Všimneme si:

- $w_i = 0 \Rightarrow \alpha_i^1 = \alpha_i^2 = \dots = \alpha_i^{r_i} = 0$
  protože $b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^{r_i}$ jsou LN (předpoklad věty)
  $\Rightarrow$ musí existovat i t.ž. $w_i \neq 0$
- pokud $w_i \neq 0$, tak w_i je vlastní vektor k vlastnímu číslu λ_i (už dříve jsme viděli – vl. vektory tvoří VP, s $\vec{0}$)
- uvažme všechny nenulové w_i - označme $w_{j_1}, \dots, w_{j_\ell}$

patří k různým vl. číslům $\Rightarrow$ jsou LN (už dříve jsme dokázali)

& $\sum_{i=1}^{\ell} w_{j_i} = 0$ (*) $\leftarrow$ spor

∎

DIAGONALIZACE SYMETRICKÝCH MATIC

Už víme: každá $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná nějaké horní trojúhelníkové

Ukážeme: každá symetrická $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná!

Důležité pojmy: komplexní číslo: $z = a + bi$, kde $i = \sqrt{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Def. komplexně sdružené číslo k $z = a+bi$ je číslo $\bar{z} = a - bi$.

💡 $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

💡 $\overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac - bd + i(ad+bc)} = ac - bd - i(ad+bc) = (a-bi)(c-di)$

neboli: $\overline{p\cdot z} = \bar{p}\cdot\bar{z}$

Def. Hermitovská transpozice matice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ je matice $A^H \in \mathbb{C}^{n\times m}$, kde $(A^H)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

Jde o zobecnění transpozice reálných matic:
pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A^H = A^T$.

Př. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -2i & 3+i \end{pmatrix}$, $A^H = \begin{pmatrix} 2 & 2i \\ 1-i & 3-i \end{pmatrix}$

Def. Matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je hermitovská, pokud $A = A^H$.

Př. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$ je hermitovská: $B = B^H$.

💡 1 Je-li $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitovská, pak $\forall i$, $A_{ii} \in \mathbb{R}$.

dk. $\forall i$ platí: $A_{ii} = A^H_{ii} = \overline{A_{ii}} \Rightarrow A_{ii} \in \mathbb{R}$. ∎

Platí: $(AB)^H = B^H A^H$. Důkaz - podobně jako u transpozice
$((AB)^H)_{ij} \overset{?}{=} (B^H A^H)_{ij}$

Věta: každá hermitovská matice A má všechna vl. čísla reálná, a

Důkaz: všimni si: $\forall v \in \mathbb{C}^n$: $v^H v$ je reálné (protože $\forall i$: $v_i^H v_i = \bar{v}_i v_i \in \mathbb{R}$)

pro vl. č. λ a jeho vl. vektor v uvaž:

$$\in\mathbb{R} \leftarrow \underbrace{(v^H A v)^H}_{z^H} = v^H A^H v = \underbrace{v^H A v}_{z} = v^H \lambda v = \lambda (v^H v) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}!$$ ∎

Věta (o diagonalizovatelnosti symetrických matic, spektrální rozklad)

Každá symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je diagonalizovatelná.

Pozn. platí obecněji i pro hermitovské matice

Uživme: ke každému $v \in \mathbb{R}^n$ tž. $v^T v = 1$ — ortonorm. báze

existují vektory $v_1 = v, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tž. $\forall i: v_i^T v_i = 1$

$\forall i \neq j: v_i^T v_j = 0.$

pro $R = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ platí: $R^T \cdot R = I$, tj. $R^T = R^{-1}$. Dk. jasné

tzv. ortogonální matice

Pozn. Následující důkaz je obdobný důkazu podobnosti každé $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s nějakou horní trojúhelníkovou maticí!

Důkaz věty: indukcí. Pro $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ jasné.

Indukční krok: $n-1 \longrightarrow n$

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická matice.

Uvažme libovolné vlastní číslo λ – víme, že $\in \mathbb{R}$,

a odpovídající vlastní vektor $v \in \mathbb{R}^n$.

Bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $v^T v = 1$

(jinak bychom místo v vzali $\frac{v}{\sqrt{v^T v}}$)

Nechť $v_1 = v, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ je nějaká ortonormální báze $\mathbb{R}^n$ – jistě existuje dle předchozího tvrzení

a nechť $R = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$.

Pak existuje $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tž. $A \cdot R = R \cdot D$, (nemusí být diagonální)

tj. $D = R^{-1} A R$

$A = R D R^{-1}$

kde $D = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & z \\ \hline 0 & \\ \vdots & \bar{D} \\ 0 & \end{array}\right)$

symetrická! $\Rightarrow z = 0$

$\Rightarrow \bar{D}^T = \bar{D}$

Všimneme si: $D^T = (R^T A R)^T = (R^T A^T R) = R^T A R = D$

Podle indukčního předpokladu existuje matice $\bar{C} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tj. $\bar{T} = \bar{C}^{-1}\cdot\bar{D}\cdot\bar{C}$ je diagonální.

Pak

$$D = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \bar{D} & \\ 0 & & & \end{array}\right] = \overset{C}{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \bar{C} & \\ 0 & & & \end{array}\right]} \overset{T}{\left[\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \bar{T} & \\ 0 & & & \end{array}\right]} \overset{C^{-1}}{\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \bar{C}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right]}.$$

$$\Rightarrow \quad A = RDR^{-1} = \underbrace{R\overbrace{C\,T\,C^{-1}}^{=D}R^{-1}}_{} = P\cdot \overset{\text{diagonální!}}{T}\cdot P^{-1}, \qquad \underbrace{RC}_{=P},\ \underbrace{C^{-1}R^{-1}}_{=P^{-1}}$$

∎

Poznámka: Jistě si všimneme:

i) pokud matice $\bar{C}$ splňuje $\bar{C}^T\bar{C} = I$,

pak také
$$C^T\cdot C = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \bar{C}^T & \\ 0 & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \bar{C} & \\ 0 & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \bar{C}^T\bar{C} \end{array}\right] = I$$

pro matici $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ můžeme vzít $A = I\cdot \overset{\text{diagon.}}{A}\cdot I$ (ortogonální)

ii) Jsou-li R a C obě ortogonální! pak
$$(R\cdot C)^T\cdot(RC) = C^TR^TRC = I,$$
tj. $P = RC$ je také ortogonální!

Důsledek: Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existuje <u>ortogonální</u> matice P a <u>diagonální</u> T

tj. $A = P\cdot T\cdot P^{-1}$.

Poznámka: Celá věta je o reálných číslech (maticích), ale dobře pracuje s komplexními (v první části)

JORDANOVA NORMÁLNÍ FORMA

Už víme: ne každá matice je diagonalizovatelná, např. $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

(kdyby byla, tak $\exists R$ $\quad RIR^{-1} = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ - spor) $\qquad$ pouze $\lambda = 1$

neplatí

ZAJÍMÁ NÁS: jak moc blízko k diagonální matici je možné se dostat.

Def: **Jordanův blok** (buňka) $J_k(\lambda)$ **řádu k** je matice

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(tj. na diagonále λ, těsně nad ní samé 1)

vlastní číslo $J_k(\lambda)$ je jediné, totiž λ.

Def: Matice J je v **Jordanově normálním tvaru**, má-li podobu

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \boxed{J_3} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{J_m} \end{pmatrix}$$

kde každé $J_i = J_{k_i}(\lambda_i)$ je Jordanův blok.

Čísla λ_i nemusí být navzájem různá.

Věta (o Jordanově normální formě):

Každá čtvercová komplexní matice je podobná matici v Jordanově norm. tvaru. Až na pořadí bloků je tvar jednoznačně určen.

bez důkazu.

VLASTNÍ ČÍSLA A GRAFY

Víme: Cayley-Hamilton: pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí $p_A(A) = 0$. (*)

Def: **minimální polynom matice A** je nenulový polynom $m_A(t)$ min. stupně tž. $m_A(A) = 0$. Př: pro $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $p_A(t) = (2-t)^2$, $m_A(t) = 2-t$.

☺ $m_A(t)$ dělí $p_A(t)$, tj. $p_A(t) = m_A(t) \cdot s(t)$ pro nějaký pol. $s(t)$.

Dk: Víme (viz minulá přednáška), že existují polynomy $s(t)$ a $z(t)$ tž. $p_A(t) = m_A(t) \cdot s(t) + z(t)$, a stupeň $z(t)$ je menší než $m_A(t)$.

$$(*) \Rightarrow 0 = \underbrace{\overbrace{m_A(A)}^{=0} \cdot s(A)}_{=0} + \underbrace{z(A)}_{=0} \Rightarrow z(t) = 0 \quad \blacksquare$$

Platí:
- každý kořen polynomu $m_A(t)$ je kořenem $p_A(t)$.
- $m_A(t)$ nemá násobné kořeny. (zkuste si dokázat) ⌂
- pro $k \geq \ell :=$ stupeň $m_A(t)$, A^k je LK $I, A, A^2, \dots, A^{\ell-1}$ ✳

Def: **diametr grafu** $G = (V, E)$ je $\max_{u,v \in V} d(u,v)$, kde $d(u,v)$ je délka (v počtu hran) mezi vrcholy u a v.

Def: **matice sousednosti grafu** $G = (V,E)$: $A \in \{0,1\}^{n \times n}$, $n = |V|$, kde $A_{ij} = 1 \iff \{i,j\} \in E$ ... procházka, vše se smí opakovat

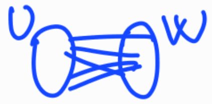
Platí: $A^k_{ij} = 1 \iff$ existuje sled délky k mezi i a j.

Věta: Počet různých vlastních čísel matice sousednosti grafu G je alespoň $\text{diametr}(G) + 1$.

Důkaz: ozn. A matici sousednosti $G = (V,E)$, $d = \text{diametr}(G)$.
Jistě existují vrcholy $i, j \in V$ tž. $d(i,j) = d$, ← délka nejkratší cesty mezi i a j.
Tedy $A^d_{ij} \geq 1$ a $A^k_{ij} = 0$ pro $k = 1, 2, \dots, d-1$.
$\Rightarrow A^d$ není lineární kombinací $I, A, A^2, \dots, A^{d-1}$
✳ $\Rightarrow d <$ stupeň $m_A(t)$, tj. stupeň $m_A(t)$ je aspoň $d+1$
$\Rightarrow$ podle ⌂ $p_A(t)$ má $\geq d+1$ různých kořenů - vl. čísel. $\blacksquare$

Věta (charakterizace bipartitních grafů pomocí vl. čísel)

Nechť $G=(V,E)$ je neorientovaný graf a $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ vlastní čísla jeho matice sousednosti. Pak G je bipartitní, právě když $\forall i = 1,\dots,n : \lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$.



Důkaz: $\Rightarrow$ nechť U a W jsou dvě partity grafu G.

Matice sousednosti G má podobu

$$A = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} U \\ W \end{array} \\ \begin{array}{cc} U & W \end{array} & \end{array}$$

Uvažme vl. vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ příslušný vl. číslu λ: $Av = \lambda v$, tedy

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} By \\ B^T x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda y = B^T x \\ \lambda x = By \end{array}$$

Všimni si

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B^T & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -By \\ B^T x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

tedy $-\lambda$ je také vl. číslo matice A.

Navíc: je-li k geometrická násobnost vl. čísla λ, pak popsaný způsob ukazuje, že geom. násobnost $-\lambda$ je také k.

$\Leftarrow$ Vezmeme liché celé kladné číslo k. Buď A matice sousedn.

A je symetrická $\Rightarrow \exists$ matice R tž. $A = R \cdot D \cdot R^{-1}$, kde D je diagonální s $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

zamysli se nad smyslem A^k

:) 1 $A^k = R \cdot D^k \cdot R^{-1}$, neboli vl. čísla A^k jsou $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$.

:) 2 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = 0$ (díky symetrii λ_i: $\lambda_i^k = -\lambda_{n-i+1}^k$) liché!

Víme: součet vl. čísel je součet prvků na diagonále,

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A^k_{ii} = 0. \text{ Protože } \forall i, A^k_{ii} \geq 0 \Rightarrow \forall i: A^k_{ii} = 0.$$

Kdyby G měl lichý cyklus C délky k, pak $\forall i \in C$, $A^k_{ii} > 0$

ALE $A^k_{ii} = 0$ (pro každé i a liché k) $\Rightarrow G$ nemá lichý cyklus, tj. G je bipartitní. ∎