VLASTNÍ ČÍSLA a VL. VEKTORY   LA 2   9/4/2025

Připomeňme: λ je vl. číslo matice A pokud existuje $u \neq 0$ tž. $Au = \lambda u$.

$\uparrow$ vl. vektor

charakteristický mnohočlen A: $p_A(t) = \det(A - tI)$

Matice $A, A' \in T^{n\times n}$ jsou podobné, pokud $\exists\, R \in T^{n\times n}$ regulární tž. $A' = R\cdot A\cdot R^{-1}$

Matice A je diagonalizovatelná, je-li podobná nějaké diagonální matici.

Základní věta algebry ZVA (bez důkazu): Každý polynom $p(z)$ s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen; tj. $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ tž. $p(z_0) = 0$.

Tvrzení: každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná nějaké horní trojúhelníkové matici.

Důkaz: indukcí podle velikosti: pro $A \ldots 1\times 1$, platí.

indukční krok: uvaž matici A $n\times n$.

Protože $p_A(z)$ má díky ZVA aspoň jeden kořen, má A nějaké vl. číslo $\lambda \in \mathbb{C}$. označme v odpovídající vl. vektor .... $Av = \lambda v$

Doplníme vektor v na bázi $\mathbb{C}^n$: $\underbrace{v_1 = v, v_2, \ldots, v_n}_{B}$,

a nechť $C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$.

Protože B je báze, existuje $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tž.

$A\cdot C = C\cdot D$, kde $D = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & z \\ \hline 0 & \bar{D} \end{array}\right]$

tj. $A = C\cdot D\cdot C^{-1}$

$\leftarrow$ už je blíž trojúhel. mat.

Podle indukčního předpokladu existuje matice $\bar{C}$ velikosti $(n-1)\times(n-1)$ tž. $\underbrace{\bar{C}^{-1}\cdot\bar{D}\cdot\bar{C}}$ je horní trojúhelníková.

označme $\bar{T}$ .... pak $\bar{D} = \bar{C}\cdot\bar{T}\cdot\bar{C}^{-1}$

Proto:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & z \\ \hline 0 & \bar{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{C} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \lambda & z\bar{C} \\ \hline 0 & \bar{T} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{C}^{-1} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{C\cdot\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{C} \end{array}\right)}_{=R}\left(\begin{array}{c|c} \lambda & z\bar{C} \\ \hline 0 & \bar{T} \end{array}\right)\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{C}^{-1} \end{array}\right)\cdot C^{-1}}_{=R^{-1}}$$

$\blacksquare$

Věta (Cayley-Hamilton). Buď $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ a $p_A(t) = b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$ její charakteristický polynom. Pak $p_A(A) = b_n A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1 A + b_0 I = 0$. (nulová matice)

Důkaz: Nechť C je matice tž. $D = C\cdot A\cdot C^{-1}$ je horní trojúhelníková. (A, D – podobné)

$\Rightarrow$ vlastní čísla A jsou diagonální prvky D – označme $d_1, d_2, \dots, d_n$.

Pak $p_A(t) = (d_1 - t)(d_2 - t)\dots(d_n - t)$. (podobné mají stejný char. pol.)

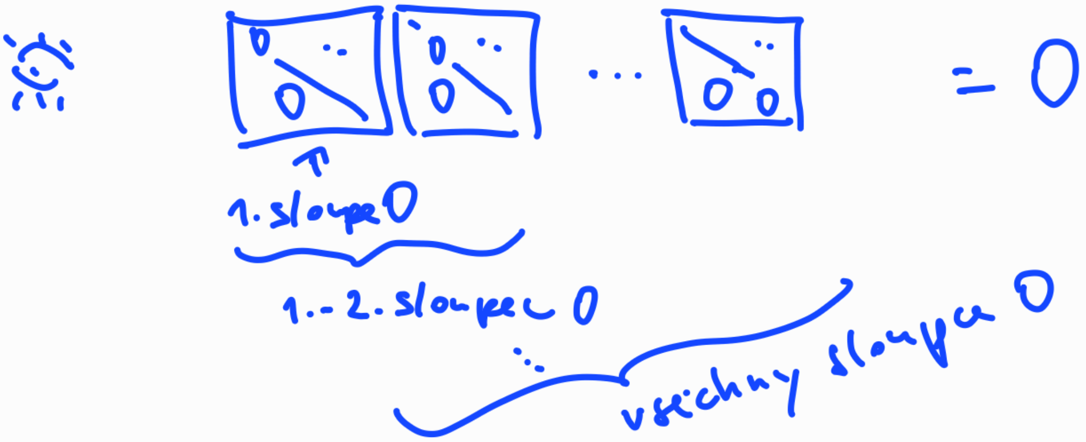
$$p_A(A) = (d_1 I - A)(d_2 I - A)\cdots(d_n I - A) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(d_i C^{-1} I C - C^{-1} D C) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(C^{-1}(d_i I - D)C) = C^{-1}\prod_{i=1}^{n}\overbrace{(d_i I - D)}^{\text{horní trojúhel., na pozici } i,i \text{ je } 0}C = 0$$

viz 👁

LA2 7/12



□

Důsledek: Pro každé $k \geq n$, $A^k \in \operatorname{span}\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.

Uvaž polynom t^k a jeho dělení polynomem $p_A(t)$.

$$t^k = \underbrace{r(t)}_{\text{polynom stupně } k-n} \cdot p_A(t) + \underbrace{s(t)}_{\text{polynom stupně } < n = \text{stupeň } p_A}$$

$$\Rightarrow A^k = r(A)\cdot \underbrace{p_A(A)}_{=0 \text{ dle Cayley-Hamilton. věty}} + s(A) = s(A).$$ □

Pozn: Je myslitelné, že dimenze $\operatorname{span}\{I, A, A^2, \dots, A^n, \dots, A^{n^2}\}$ bude $\sim n^2$ – je pouze $\leq n+1$.

Pro úplnost:

Platí: Nechť p a q jsou polynomy. Pak existuje právě jeden polynom r a jeden polynom z splňující
i) $p = q \cdot r + z$
ii) stupeň polynomu z (zbytek) je menší než stupeň q

Důsledek ZVA: každý polynom v $\mathbb{C}$ lze zapsat jako

$$p(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$ kde $x_1, \dots, x_n$ jsou komplexní kořeny. v $\mathbb{R}$ neplatí!

Tvrzení: Pro matici $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ s vlastními čísly $\lambda_1,\dots,\lambda_n$

platí i) $\det(A) = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n$.

ii) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n$.

Důkaz: dle Důsledku ZVA

i) $p_A(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$

$\det(A) = p_A(0) = (-1)^n(-\lambda_1)(-\lambda_2)\dots(-\lambda_n) = \lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n$.

víme z minulé přednášky

ii) Uvaž. normální trojúhelníkovou matici D podobnou A a char. polynomy p_A a p_D.

Víme, že

a) $p_A = p_D$ (⇒ podobné matice mají stejná vl. č.)

b) D má na diagonále vl. čísla matice A

c) koeficient u x^{n-1} je $(-1)^{n-1}\cdot$ "součet na diagonále"

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \overset{a)+c)}{=} \sum_{i=1}^{n} d_{ii} \overset{b)}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$ ∎

Připomenutí:

násobnost kořene r polynomu p je největší kladné celé číslo k takové, že $(x-r)^k$ dělí polynom p.

Def: Algebraická násobnost vl. čísla λ matice $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ je rovna násobnosti kořene λ polynomu $p_A(x)$.

Geometrická násobnost vl. čísla λ je $\dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda I))$ tj. počet lin. nezávislých vl. vektorů k vl. číslu λ.

Příklad: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2$

... jediný kořen násobnosti 2

$\Rightarrow$ jediné vl. číslo matice A je $\lambda = 1$

algebraické násobnosti 2

vlastní vektory? $(A - \lambda I)x = 0$ $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0$, vl. vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \dim(\mathrm{Ker}) = 1$

$\Rightarrow$ geometrická násobnost vl. č. 1 je 1

Věta: Matice $A \in T^{n \times n}$ je diagonalizovatelná, právě když i) součet algebraických násobností vl. čísel je n,

a ii) geometrická násobnost každého vl. čísla je rovna jeho algebraické násobnosti.

Pozn: Pro $T = \mathbb{C}$ dostáváme:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ ke každému vl. č. λ_i existuje r_i LN vektorů, kde r_i je algebr. násobnost λ_i.

Důkaz: $\Rightarrow$ dle předp. existuje regulární R a diag. D

tj. $D = R^{-1} \cdot A \cdot R$, tj. $A \cdot R = R \cdot D$

tj. $\forall i$, i-tý sloupec R je vlastní vektor k vl. č. D_{ii}.

- každé vlastní číslo je na diagonále tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost
- ke každému výskytu vl. č. na diagonále máme jiný vl. vektor
- protože R je regulární, jsou vektory ke stejnému vl. číslu lineárně nezávislé.