Opakování:

Def: Je-li $A \in T^{n\times n}$, pak $\lambda \in T$ je **vlastní číslo** matice A a $v \in T^n$ jemu příslušný **vlastní vektor**, pokud $Av = \lambda v$ a $v \neq 0$.
(obdobně pro lin. zobrazení $f: V \to V$)

Věta *: λ je vl. číslo matice $A \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Def: **Charakteristický polynom matice** $A \in T^{n\times n}$ definujeme jako $p_A(t) = \det(A - t\cdot I)$, kde t je proměnná.

Př. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $p_A(t) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 2-t \end{pmatrix} = (1-t)(2-t) - 2\cdot 3 = t^2 - 3t - 4$
$= (t-4)(t+1)$

💡 vlastní čísla A .... kořeny $p_A(t)$ - díky Větě *

💡 Vlastní vektory odpovídající stejnému vl. číslu A doplněné o nulový vektor tvoří vektorový podprostor.

důkaz: uvažme vl. číslo λ matice $A \in T^{n\times n}$,
nechť $U = \{v \in T^n : Av = \lambda \cdot v\}$ ← vl. vektory k λ a k tomu $0 \in T^n$.
Pak $\forall u, v \in U$, $\forall t \in T$:
- $A(u+v) = Au + Av = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$, tj. $u+v \in U$
- $A(t\cdot u) = t(A\cdot u) = t\cdot(\lambda u) = \lambda\cdot(t\cdot u)$, tj. $t u \in U$. ☒

Obdobně pro vl. č. a vl. v. lin. zobrazení f.

Připomeňme si: Pro matice přechodu od báze k bázi platí: ${}_{B'}[id]_B = {}_B[id]_{B'}^{-1}$

Pro matice lin. zobrazení f vůči bázím ...

$${}_B[f]_B = {}_B[id]_{B'} \; {}_{B'}[f]_{B'} \; {}_{B'}[id]_B$$

k sobě inverzní matice

↖ tu chceme hezkou - diagonální ideálně.

V našem příkladu z minulého týdne: $f(x)=Ax$

$B' = K$ - kanonická, $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \right\}$

$$\overbrace{\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}}^{A' = {}_B[f]_B} = \frac{1}{5}\overbrace{\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}}^{R = {}_B[id]_K}\overbrace{\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}}^{A = {}_K[f]_K}\overbrace{\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}}^{R^{-1} = {}_K[id]_B}$$

Def.: Čtvercové matice A a A' se nazývají **podobné**, pokud $A' = R\cdot A\cdot R^{-1}$ pro nějakou regulární R.

Def: Matice A je **diagonalizovatelná**, je-li podobná nějaké diagonální matici. DÚ: ekvivalence

Např.: A, A' v příkladu jsou podobné a je diagonalizovatelná.

Věta: Buď $f: V\to V$ lin. zobrazení. Báze B tž. ${}_B[f]_B$ je diagonální, existuje právě tehdy, když existuje báze V složená z vlastních vektorů.

Důkaz: $\Rightarrow$ uvaž $B=(b_1,\dots,b_k)$ tž. ${}_B[f]_B$ je diagonální, neboli pro vhodné $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ platí:

$$\left([f(b_1)]_B \ \cdots \ [f(b_k)]_B \right) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k\end{pmatrix}$$

tj. $\forall i$, $f(b_i) = \lambda_i\cdot b_i$ – B je báze z vl. vektorů.

$\Leftarrow$ Nechť $B=(b_1,\dots,b_n)$ je báze V tž. ~~každé~~ b_i je vlastní vektor, tj. $\forall i$ $\exists \lambda_i$ tž. $f(b_i) = \lambda_i\cdot b_i$.

$$\text{Proto } {}_B[f]_B = \left(\overbrace{[f(b_1)]_B}^{=[\lambda_1 b_1]_B} \ \cdots \ \overbrace{[f(b_n)]_B}^{=[\lambda_n b_n]_B} \right) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

Totéž v řeči matic: $A\in T^{n\times n}$ je diagonalizovatelná, právě když existuje báze B VP T^n složená z vl. vektorů matice A.

uvaž $f: T^n\to T^n$ tž. $f(x) = Ax$. Pak $A = {}_K[f]_K$, a platí:

A diag. $\Leftrightarrow$ $\exists$ báze B VP T^n tž. ${}_B[f]_B$ je diag.

Věta: Jsou-li $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ navzájem různá vlastní čísla zobrazení f (matice A) a $v_1,\dots,v_n$ jsou vlastní vektory příslušné vl. číslům $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, pak vektory $v_1,\dots,v_n$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: indukcí dle n. $n=1$ – OK

ind. krok $n-1 \to n$: Uvaž LK $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. (*)

Pak $0 = f(0) = f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i =$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i - \lambda_n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right)}_{=0} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_n)}_{\neq 0} v_i$$

$\Rightarrow$ dle ind. př. $v_1,\dots,v_{n-1}$ LN $\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = 1,\dots,n-1$

Díky (*) musí být také $a_n = 0 \Rightarrow v_1,\dots,v_n$ jsou LN. ∎

Důsledek 1: Čtvercová matice $n\times n$ má nejvýše n různých vlastních čísel.

Důsledek 2: Má-li A n různých vl. čísel, pak je diagonalizovatelná. (neplatí naopak! např. I).

Pro úplnost  Matice $A \in T^{n\times n}$ je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ existuje báze B VP T^n složená z vl. v. matice A.

Dk: $\Rightarrow$ existuje diagonální D a regulární R t.ž. $D = R\cdot A\cdot R^{-1}$ $\Rightarrow$ $R^{-1}\cdot D = A R^{-1}$

Označíme-li b_i = i-tý sloupec R^{-1}: $D_{ii} b_i = A\cdot b_i$

__tudíž__: každé b_i je vl. v. matice A, a dohromady tvoří bázi T^n

$\Leftarrow$ Nechť R je matice, jejíž sloupce jsou vektory báze B. Pak $A\cdot B = B\cdot \underset{\text{diagonální}}{D}$. Protože B je regulární, $\exists B^{-1}$ $\Rightarrow A = B\cdot D\cdot B^{-1}$ ∎

Uvědomme si: A je diagonalizovatelná – matice $f(x) = Ax$ je diagonální pro vhodnou bázi B.

Věta: Jsou-li A a B podobné matice, pak $p_A(t) = p_B(t)$.

Důkaz: víme: $\exists R$ tž. $B = R \cdot A \cdot R^{-1}$

$$p_B(t) = \det(B - tI) = \det(R \cdot A \cdot R^{-1} - t \cdot R \cdot I \cdot R^{-1})$$
$$= \det(R \cdot (A - t \cdot I) R^{-1}) = \det(R) \det(A - tI) \cdot \det(R^{-1})$$
$$= \det(A - tI) = p_A(t). \quad \blacksquare$$

Pozor! Neplatí naopak: např. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Jistě $p_A(t) = p_B(t)$.

Kdyby byly podobné, $\exists R$: $A = \underbrace{R \cdot B \cdot R^{-1}}_{=I}$ – spor.

Díky větě má smysl následující definice:

Def: Nechť $f: V \to V$ je lin. zobrazení.

Charakteristický polynom f $p_f(t)$ je charakt. polynom matice lin. zobr. vůči libovolné bázi.

Už jsme si všimnuli, že pro každé dvě báze B, B', matice ${}_B[f]_B$ a ${}_{B'}[f]_{B'}$ jsou podobné $\Rightarrow$ díky větě nezáleží na volbě báze – vždy dostaneme stejný polynom.

Důležité koeficienty charakt. mnohočlenu

Označme $p_A(t) = b_n \cdot t^n + b_{n-1} \cdot t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$

- $b_n = (-1)^n$ ... ze součinu prvků diagonály $A - tI$
- $b_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-t & & & \\ & a_{22}-t & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}-t \end{pmatrix}$$

jediná možnost, jak získat t^n je z příspěvku $\prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-t)$ u $n-1$ členů vybrat $(-t)$, a u jednoho a_{ii}. Sečtením všech těchto součinů dostaneme b_{n-1}.

- $b_0 = \det(A)$ .... dosaď $t=0$ do $A - tI$, do $p_A(t)$
  $\quad$ " $p_A(0)$

Věta: Matice A je singulární právě když 0 je její vlastní číslo.

Důkaz: víme • A singulární $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ $\Leftrightarrow \det(A - 0 \cdot I) = 0 \Leftrightarrow 0$ je vl. č. A. ∎

Tj. poznáme podle koeficientu b_0, je-li A singulární.

Základní věta algebry (bez důkazu):
Každý polynom s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.

Důsledek: každý polynom v $\mathbb{C}$ lze zapsat jako
$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, kde $x_1, \dots, x_n$ jsou komplexní kořeny.

Pozn. v $\mathbb{R}$ to nejde vždy: $p(x) = x^2 + 1$

Tvrzení: každá matice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je podobná nějaké horní trojúhelníkové matici.

Důkaz: indukcí podle velikosti: pro $A \dots 1\times 1$, platí

indukční krok: uvažž matici A $n\times n$. (*) základní věta algebry

Víme, (*) že má nějaké vl. číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, označme v odpovídající vl. vektor .... $Av = \lambda v$

Doplníme vektor v na bázi $\mathbb{C}^n$: $\underbrace{v_1 = v, v_2, \dots, v_n}_{B}$,

a nechť $C = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$.

Protože B je báze, existuje $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tž.

$$A\cdot C = C\cdot D, \text{ kde } D = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & z \\ \hline 0 & \bar{D} \end{array}\right)$$

tj. $A = C\cdot D\cdot C^{-1}$

Podle indukčního předpokladu existuje matice $\bar{C}$, $(n-1)\times(n-1)$ tž. $\underbrace{\bar{C}^{-1}\cdot \bar{D}\cdot \bar{C}}_{\text{označme } \bar{T}}$ je horní trojúhelníková. .... pak $\bar{D} = \bar{C}\cdot\bar{T}\cdot\bar{C}^{-1}$

Proto:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & z \\ \hline 0 & \bar{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{C} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & z\bar{C} \\ \hline 0 & \bar{T} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{C}^{-1} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A = C\cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{C} \end{array}\right)}_{=R} \left(\begin{array}{c|c} \lambda & z\bar{C} \\ \hline 0 & \bar{T} \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \bar{C}^{-1} \end{array}\right)}_{=R^{-1}} \cdot C^{-1}$$

∎