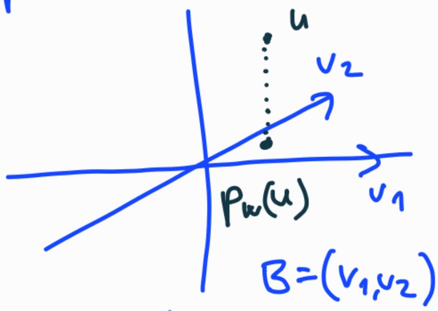
Opak:

Df: ortogonální projekce V na W: zobrazení $p_W : V \to W$, dané předpisem $p_W(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u | v_i \rangle \cdot v_i$



Platí: $\forall z \in W, z \neq p_W(u)$: $\| u - p_W(u) \| < \| u - z \|$

GRAM-SCHMIDTOVA ORTONORMALIZACE

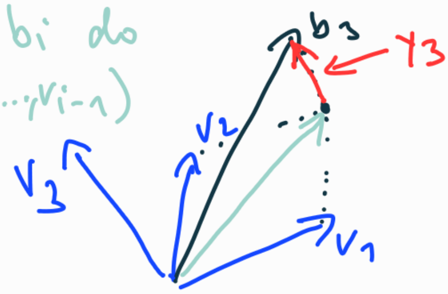
Algoritmus, který z dané báze $(b_1, \dots, b_n)$ spočítá ortonormální bázi $(v_1, \dots, v_n)$.

for $i = 1, \dots, n$ do

$$y_i := b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_i | v_j \rangle \cdot v_j$$

projekce b_i do $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})$

$$v_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$$



Všimněme si: $\forall i$ v_i je lineární kombinací $b_1, \dots, b_i$, navíc s kladným koeficientem u b_i

$\Rightarrow$ při značení $B = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \cdots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ... $Q^T Q = I$ ortogonální

dostáváme: $Q = B \cdot P$, kde P je horní trojúhelníková matice s kladnou diagonálou

Důsledek (QR dekompozice regulárních reálných matic)

Je-li B regulární matice, pak existuje ortogonální matice Q a horní trojúhelníková matice R s kladnou diagonálou tž. $B = Q \cdot R$.

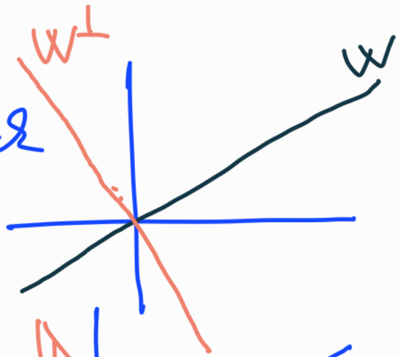
Důkaz: viz výše a vezmi $R = P^{-1}$.

Vzpomeňme: inverzní matice k horní trojúhel. s kladnou diag. je ~~taky~~ horní trojúhelníková s kladnou diagonálou.

(pro $\mathbb{C}$: místo ortogonální $\to$ tzv. unitární: $Q^H \cdot Q = I$)

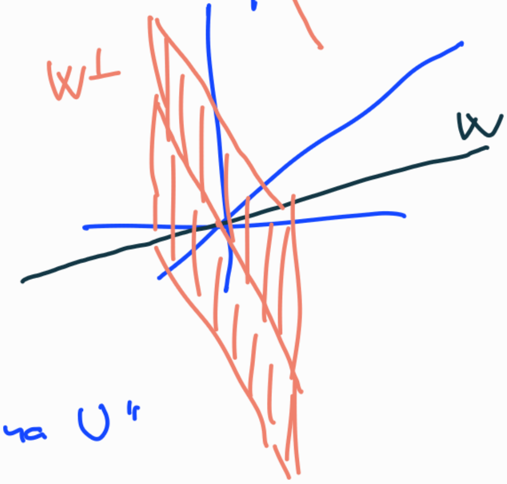
Definice: Nechť W je množina vektorů na VPV (se SS). Pak **ortogonální doplněk** W je množina ... tj. $\langle u|v\rangle = 0$

$$W^\perp = \{v \in V : \forall u \in W,\ u \perp v\}.$$



Příklad: • $V = \mathbb{R}^2$, W … přímka skrz počátek

$W^\perp$ … přímka kolmá na W, skrz počátek



• $V = \mathbb{R}^3$, W … přímka skrz počátek, $W^\perp$ … rovina kolmá na W skrz počátek

1 $U \subseteq V \Rightarrow V^\perp \subseteq U^\perp$

dk: jasné – "vše kolmé na V je kolmé i na U"

$$x \in V^\perp \Leftrightarrow \forall v \in V,\ x \perp v \Rightarrow \forall v \in U,\ x \perp v \Leftrightarrow x \in U^\perp \quad \blacksquare$$

2 Je-li $B = (b_1, \dots, b_n)$ báze (SG) podprostoru W, pak $v \in W^\perp \Leftrightarrow \forall i = 1, .., n,\ v \perp b_i$.

dk: $\Rightarrow$ jasné

$\Leftarrow$ chci ověřit, že $\forall u \in W,\ v \perp u$

$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, pro vhodná α_i: $\langle u|v\rangle = \langle \sum_i \alpha_i b_i | v\rangle = \sum_i \alpha_i \underbrace{\langle b_i | v\rangle}_{=0} = 0. \quad \blacksquare$

• Uvaž soustavu $Ax = 0$.

3 $\ker(A) = \{x \mid Ax = 0\} = R(A)^\perp$

$\supseteq$ díky **1**

$\subseteq$ díky **2** - řádky A tvoří SG $R(A)$

Věta (Vlastnosti ortogonálního doplňku podprostoru)

Nechť W je podprostor VP V konečné dimenze. Pak platí:

i) $W^\perp$ je podprostor V.

ii) $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$

iii) $(W^\perp)^\perp = W$

iv) $W^\perp \cap W = \{\vec{0}\}$.

Důkaz: i) ověříme uzavřenost $W^\perp$ na sčítání a násobení:

• $u, v \in W^\perp$: $\forall x \in W$, $\langle u+v|x\rangle = \underbrace{\langle u|x\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v|x\rangle}_{=0} = 0$,

$\Rightarrow u+v \in W^\perp$ protože $u,v \in W^\perp$

• $u \in W^\perp$, $\alpha \in T$: $\forall x \in W$, $\langle \alpha u|x\rangle = \alpha \underbrace{\langle u|x\rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow \alpha u \in W^\perp$ □

ii) Nechť $B = (b_1, \dots, b_k)$ je ortonormální báze podpros. W.

Rozšíříme ji na ortonormální bázi H celého prost. V:

$H = (b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_l)$. – lze díky Gram-Sch. ortonormal.

Stačí nahlédnout, že $C = (c_1, \dots, c_l)$ je báze $W^\perp$.

Vezmi libovolné $v \in W^\perp$. Víme, že jeho souřadnice vůči H jsou dány Fourierovými koef. –

$0 = \langle v|b_i\rangle$ pro prvních k souřadnic,

$\langle v|c_j\rangle$ pro posledních l souřadnic.

Protože $v \in W^\perp$, $\forall b_i \in W$ platí $\langle v|b_i\rangle = 0$.

$\Rightarrow v \in W^\perp$ je pouze LK vektorů $c_1, \dots, c_l$,

tedy C je báze $W^\perp$. ■

iii) Díky $v \in (W^\perp)^\perp$ právě když $\forall i = 1, \dots, l$, $\underbrace{v \perp c_i}_{\langle v|c_i\rangle = 0}$, což

H je (orton.) báze → je právě když $v \in \mathcal{L}(B)$, tj. $v \in W$.

Four. koef.

iv) kdyby $\exists u \in W^\perp \cap W$, $u \neq \vec{0}$, tak $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$ t.ž.

$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i = \sum_{j=1}^{l} \beta_j c_j \Rightarrow H$ není LN – spor. □

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

- Uvažme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(x) = A \cdot x$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = {}_K[f]_K$
- Uvědomme si, že A je též matice f vůči "kanonické" bázi K.
- Uvažme dále vektory $\boxed{b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$, $\boxed{b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$, bázi $B = (b_1, b_2)$

  a matici f vůči B:

Podle definice

$$ {}_B[f]_B = \left([f(b_1)]_B, [f(b_2)]_B \right) = $$

$$ = \left(\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B, \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \right]_B \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{= A'} $$

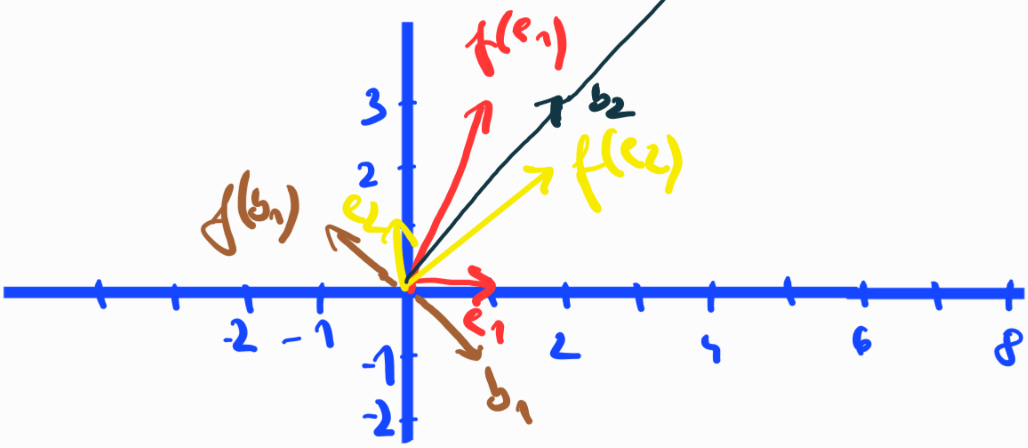
← „jednoduchá" hezká matice - diagonální

uvidíme souvislost

Všimneme si:

$$ \left. \begin{aligned} f(b_1) &= -b_1 \\ f(b_2) &= 4 \cdot b_2 \end{aligned} \right\} $$ zobrazí fce na svůj násobek

$f(b_2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$



dále: $\det(A) = \det(A') = -4$

O čem to je: pro dané lin. zobrazení $f: V \to V$, (nebo pro čtvercovou matici $A \in T^{n \times n}$)

- chceme najít bázi, vůči které má f jednoduchý (hezký) popis (~ diagonální matice)
- chceme najít směry, které zobrazení nemění

- Připomeňme si: Matice přechodu od báze $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ k bázi $B = (b_1, \dots, b_n)$:

$$ {}_B[id]_{B'} = \left([b'_1]_B \cdots [b'_n]_B \right) \qquad \text{Platí: } {}_{B'}[id]_B = {}_B[id]_{B'}^{-1} $$

k sobě inverzní matice

Také víme (skládání zobrazení):

$$ {}_B[f]_B = {}_B[id]_K \; {}_K[f]_K \; {}_K[id]_B $$

tu chceme hezkou - diagonální ideálně.

V našem příkladu:

$$ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A'} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{T} $$

$\det T = 5$

Definice: Čtvercové matice A a A' se nazývají podobné, pokud $A' = R \cdot A \cdot R^{-1}$ pro nějakou regulární R.

Def: Matice A je diagonalizovatelná, je-li podobná nějaké diagonální matici.

Např.: A, A' v příkladu jsou podobné, A je diagonalizovatelná.

Def: Je-li $f: V \to V$ lineární zobrazení (V je VP nad T), pak $\lambda \in T$ je **vlastní číslo zobrazení f**, právě když existuje **nenulový** vektor $v \in V$ t.ž. $f(v) = \lambda \cdot v$.

Vlastní vektor příslušný k λ je každé $v \in V$, $v \neq 0$ splňující $f(v) = \lambda \cdot v$.

Def: Je-li $A \in T^{n \times n}$, pak $\lambda \in T$ je **vlastní číslo matice A** právě když existuje $v \neq 0$ t.ž. $Av = \lambda v$.

: Vlastní vektory odpovídající stejnému vl. číslu, doplněné o nulový vektor, tvoří **vektorový podprostor** ... nad T

důkaz: Uvažme lin. zobr. $f: V \to V$ a jeho vl. č. λ.

Označme $U = \{v \in V : f(v) = \lambda \cdot v\} \cup \{0\}$.

Chceme ověřit uzavřenost U na sčítání a násobení.

Pro libovolné $u, v \in U$, $t \in T$ platí:

$$f(t \cdot u) = t \cdot f(u) = t \cdot \lambda \cdot u = \lambda \cdot (t \cdot u)$$

$$f(u+v) = f(u) + f(v) = \lambda \cdot u + \lambda v = \lambda (u+v) \quad \blacksquare$$

Věta (Charakterizace vlastních čísel - souvislost s deter.)

Buď $A \in T^{n \times n}$. Pak λ je vlastním číslem A právě tehdy, když $\det(A - \lambda I) = 0$.

Důkaz: λ vl. číslo $\iff \exists v \neq 0$ t.ž. $Av = \lambda v$ $= \lambda I v$

$\iff \exists v \neq 0 \; (A - \lambda I) v = 0 \iff A - \lambda I$ singulární

$\iff \det(A - \lambda I) = 0 \quad \blacksquare$

Def. **Charakteristický mnohočlen** matice $A \in T^{n \times n}$ definujeme jako $p_A(t) = \det(A - t \cdot I)$, kde t je proměnná.

: vlastní čísla A .... kořeny $p_A(t)$