Opakování:

**Definice: skalární součin**

zobrazení $V \times V \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) splňující axiomy:

linearita:

(L1) $\forall x, y \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$): $\langle \alpha x | y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle$

(L2) $\forall x, y, z \in V$: $\langle x + y | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle$

pozitivní → (P) $\forall x \in V$: $\langle x | x \rangle \geq 0$ a $\langle x | x \rangle = 0$ pouze pro $x = 0$

komut. → (K) $\forall x, y \in V$: $\langle x | y \rangle = \underbrace{\overline{\langle y, x \rangle}}_{\text{komplexní}}$ (tj. $\langle x | y \rangle = \langle y, x \rangle$ pro $\mathbb{R}$)

**Věta (Cauchy-Schwarzova nerovnost).**

$\forall x, y \in V$: $|\langle x | y \rangle| \leq \underbrace{\sqrt{\langle x | x \rangle}}_{\|x\|} \underbrace{\sqrt{\langle y | y \rangle}}_{\|y\|}$ norma odvozená ze sk. s.

---

## KOLMOST

**Definice:** Vektory $x, y$ ve VP $V$ se skalárním souč. se nazývají **kolmé**, pokud $\langle x | y \rangle = 0$. Značíme: $x \perp y$.

Každý systém nenulových, vzájemně kolmých vektorů je lineárně nezávislý.

dk: máme $v_1, \dots, v_k$, $\forall i \neq j$ $v_i \perp v_j$.

Sporem: Předp. že jsou lin. závislé, búno: $v_1 = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v_i$.

Pak $\langle v_1 | v_1 \rangle = \langle \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v_i | v_1 \rangle \overset{L1,L2}{=} \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle v_i | v_1 \rangle}_{=0} = 0$

$\Rightarrow v_1 = 0$ – spor s nenulovostí. ■

**Definice:** Báze $B = (v_1, \dots, v_n)$ VP $V$ se skalár. součinem je **ortonormální**, pokud

- $\forall i \neq j$, $v_i \perp v_j$
- $\forall i$, $\|v_i\| = 1$.

**Tvrzení**: Nechť $(v_1,\dots,v_n)$ je ortonormální báze VP $V$ a $x\in V$.

Pak $x = \langle x|v_1\rangle v_1 + \langle x|v_2\rangle v_2 + \dots + \langle x|v_n\rangle v_n$.

Smysl: je snadné získat souřadnice vektoru vůči ort. bázi.

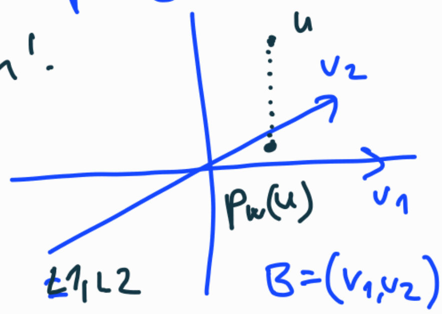
**Důkaz**: nechť $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ jsou koeficienty tž. $x=\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$

Pak $\forall j$: $\langle x|v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \middle| v_j\right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i|v_j\rangle = \alpha_j$ ∎

Koeficienty $\langle x|v_j\rangle$ ... tzv. Fourierovy koeficienty vektoru $x$

**Definice**: Nechť $W$ je podprostor VP $V$ se skal. součinem a $B=(v_1,\dots,v_n)$ je ortonormální báze VP $W$.
Pak zobrazení $p_W: V\to W$ definované předpisem
$p_W(u)=\sum_{i=1}^n\langle u|v_i\rangle\cdot v_i$ se nazývá ortogonální projekce $V$ na $W$.

DÚ: Ověřte, že $p_W$ je lineární zobrazení.




$\forall j=1,\dots,n$: $(u-p_W(u))\perp v_j$

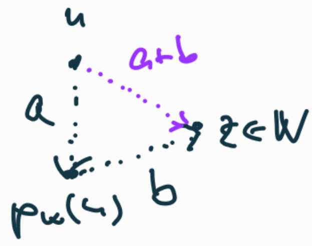
Dk: $\langle u-p_W(u)|v_j\rangle = \left\langle u - \sum_{i=1}^n\langle u|v_i\rangle v_i \middle| v_j\right\rangle =$

$\langle u|v_j\rangle - \sum_{i=1}^n\left(\langle u|v_i\rangle\underbrace{\langle v_i|v_j\rangle}_{=1 \text{ pro } i=j,\ \text{jinak } 0}\right) = \langle u|v_j\rangle - \langle u|v_j\rangle = 0$ ∎

**Tvrzení**: Vektor $p_W(u)$ je vektor z $W$, který je nejbližší k vektoru $u$ (tj. $\forall z\in W, z\neq p_W(u): \|u-p_W(u)\| < \|u-z\|$).

**Důkaz**: uvažme libovolné $z\in W$

a trojúhelník $u, z, p_W(u)$




označme $a = p_W(u)-u$
$b = z - p_W(u)$ Dle : $a\perp b$

chceme: $\|a\| \overset{?}{<} \|a+b\|$

tzv. Pythag. věta

$\|a+b\|^2 = \langle a+b|a+b\rangle = \langle a|a\rangle + \underbrace{\langle a|b\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle b|a\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle b|b\rangle}_{>0} =$
$= \|a\|^2+\|b\|^2 > \|a\|^2$ ∎

**Důsledek**: Zobrazení $p_W$ nezávisí na volbě báze $B$.

**Cauchy-Schwarz nerovnost:** $\forall x,y \in V: |\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$

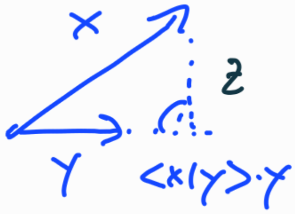
<u>Jiný důkaz:</u> pokud $x=0$, nebo $y=0$ – platí

$\Rightarrow$ předpokládáme $x \neq 0$ a $y \neq 0$.

Takté předp. $\|y\|=1$ (jinak vynásob obě strany $\cdot \frac{1}{\|y\|}$)

tj. chceme $|\langle x|y\rangle| \leq \sqrt{\langle x|x\rangle}$

Nechť $z = x - \overbrace{\langle x|y\rangle y}^{P_y(x)}$. Pak $\langle z|y\rangle = 0$.




$$\Rightarrow \langle x|x\rangle = \langle \langle x|y\rangle y + z \,|\, \langle x|y\rangle y + z\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle x|y\rangle\cdot\overline{\langle x|y\rangle}}\cdot\underbrace{\langle y|y\rangle}_{=1} + \underbrace{\langle z|z\rangle}_{\geq 0} \geq |\langle x|y\rangle|^2 \quad \blacksquare$$

vsuvka: pro $z=a+bi$, $z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$

„Norma projekce $x$ na libovolný jednotkový vektor $y$ je nejvýše rovna normě $x$ (projekce neprodlužuje)."

$$\|\langle x|y\rangle y\| = |\langle x|y\rangle| \leq \|x\|$$

Připomeňme: **Norma** – zobrazení $V \to \mathbb{R}$ t.ž.

(P) $\forall x \in V: \|x\| \geq 0$ a $\|x\|=0$ pouze pro $x=0$

(L) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$): $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$

(TN) $\forall x,y \in V: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Důsledek 1:** Ve UP $V$ nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) je norma odvozená ze skalárního součinu normou.

<u>Dk:</u> axiomy (P), (L) jasné

(TN): $\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y|x+y\rangle} = \sqrt{\langle x|x\rangle + \underbrace{\langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle}_{=\langle x|y\rangle + \overline{\langle x|y\rangle} \leq 2|\langle x|y\rangle|} + \langle y|y\rangle}$

$z + \bar{z} \leq 2|z|$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|. \quad \blacksquare$$

Zásadní otázka: <u>Existuje vůbec ortonormální báze?</u>

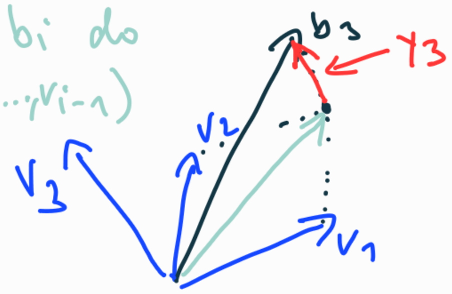
GRAM-SCHMIDTOVA ORTONORMALIZACE

Algoritmus, který z dané báze $(b_1, \dots, b_n)$ spočítá ortonormální bázi $(v_1, \dots, v_n)$.

for $i = 1, \dots, n$ do

$$y_i := b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} \langle b_i | v_j \rangle \cdot v_j}_{\text{projekce } b_i \text{ do } \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1})}$$

$$v_i = \frac{y_i}{\|y_i\|}$$




**Tvrzení**: $(v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_n)$.

**Důkaz**: indukcí nahlédneme:

$\forall i: (v_1, \dots, v_i)$ je ortonormální báze $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_i)$.

$i = 1$ jistě $\|v_1\| = \frac{\|y_1\|}{\|y_1\|} = 1$, násobek $b_1$.

$i-1 \to i$: $(v_1, \dots, v_{i-1})$ je dle ind. předp. orton. báze $\mathcal{L}(b_1, \dots, b_{i-1})$

- jistě $y_i \neq 0$ - jinak by $b_1, \dots, b_i$ byly LZ
  $\Rightarrow \|v_i\| = \left\| \frac{y_i}{\|y_i\|} \right\| = 1$ ← linearita normy
- $y_i \perp v_j \quad \forall j = 1, \dots, i-1$ dle, tedy též $v_i \perp v_j$
- dle lemmatu o výměně: $\underbrace{\mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, b_i)}_{= \mathcal{L}(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i)} = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i)$ ■

LA 2 8/3

**Důsledek 1**: Je-li W podprostor VP V se skalárním součinem konečné dimenze, pak lze <u>každou</u> ortonormální bázi W <u>rozšířit</u> na ortonormální bázi V. (uvaž $W = \{0\}$)

<u>dk</u>: nejprve doplň danou ortonor. bázi W na bázi celého V - dle Steinitzovy věty, a poté použij G-SCH. ortonormalizaci (na vektorech báze V nebude nic měnit). ■

**Důsledek 2**: každý VP konečné dimenze má ortonormální bázi.