DETERMINANTY, část 3 LA2 $\boxed{12/3/2025}$

Připomenutí:

Def: $$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$$

Platí: 1. $\det(A) = \det(A^T)$

2. $$\det\begin{pmatrix} — & v_1 & — \\ & \vdots & \\ — & \alpha u + \beta z & — \\ & \vdots & \\ — & v_n & — \end{pmatrix} = \alpha \det\begin{pmatrix} — & v_1 & — \\ & \vdots & \\ — & u & — \\ & \vdots & \\ — & v_n & — \end{pmatrix} + \beta \cdot \det\begin{pmatrix} — & v_1 & — \\ & \vdots & \\ — & z & — \\ & \vdots & \\ — & v_n & — \end{pmatrix}$$

„det. je lineární funkcí každého svého řádku/sloupce"

3. A je regulární $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

4. Pro regulární A: $$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji})}{\det(A)}$$

kde A^{ji} = A bez řádku j a sloupce i

5. $\det(A_{i \to e_j}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji})$

Věta (Laplaceův rozvoj): Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ji} \cdot \det(A^{ji}).$$

„rozvoj podle sloupce i"

Dk: i-tý sloupec A lze rozepsat jako $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot e_j$

$$\det(A) \overset{\text{bod 1}}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \det(A_{i \to e_j}) \overset{\text{bod 5}}{=} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det(A^{ji}) \quad \blacksquare$$

---

libovolná, klidně singulární

Def: Nechť $A \in T^{n \times n}$, $n \geq 2$, je matice. Pak **adjungovaná matice** k matici A je matice daná předpisem:

$$(\operatorname{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A^{ji}) \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, n.$$

Všimněme si: Pro regulární A: $$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN

Známe eukleidovský prostor

- body, vektory: n-tice z $\mathbb{R}^n$ + délka, úhel
- standardní skalární součin vektorů: $\langle x|y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n = x^Ty$
- délka vektoru x: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ (tzv. norma)
- úhel dvou vektorů x, y: $\cos\varphi = \dfrac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}$

Všimneme si:

- pojmy délka, úhel odvozeny ze sk. součinu
- pokud fixujeme vektor y, pak $\langle \dots | y\rangle$ (sk. součin s y) je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

  $\Rightarrow$ možný pohled na $\langle x, y\rangle$ .... pečicí forma

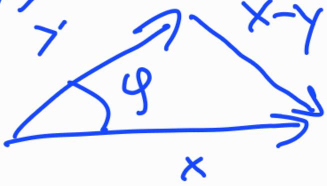
  ozdoba .... (statický) vektor, se kterým se něco dělá .... vektor (matice), který něco dělá

  role jsou symetrické, pohledy lze prohodit

- $\langle x-y | x-y\rangle = \langle x|x\rangle - 2\langle x|y\rangle + \langle y|y\rangle$

  tj. $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\varphi$

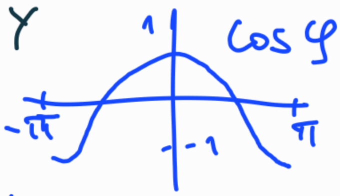
  kosinová věta



- pro jednotkové vektory x, y: $\langle x, y\rangle = \cos\varphi$

  určitá míra podobnosti x a y

  užití při analýze dat



Zavedeme obecný pojem skalárního součinu ve vektorových prostorech

Definice: Nechť V je VP nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Pak zobrazení $V \times V \to \mathbb{R}$ (nebo $\to \mathbb{C}$), které dvojici vektorů x, y přiřazuje číslo $\langle x|y\rangle$, se nazývá **skalární součin**, pokud splňuje následující axiomy:

linearita:

(L1) $\forall x,y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$): $\langle \alpha x|y\rangle = \alpha \langle x|y\rangle$

(L2) $\forall x,y,z \in V$: $\langle x+y|z\rangle = \langle x|z\rangle + \langle y|z\rangle$

pozitivní $\to$ (P) $\forall x \in V$: $\langle x|x\rangle \geq 0$ a $\langle x|x\rangle = 0$ pouze pro $x = 0$

komut. $\to$ (K) $\forall x,y \in V$: $\langle x|y\rangle = \underbrace{\overline{\langle y|x\rangle}}_{\text{komplexně sdružené č. k } \langle y|x\rangle}$ (tj. $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$ pro $\mathbb{R}$)

Všimneme si:

- (K) implikuje: $\langle x|x\rangle = \overline{\langle x|x\rangle}$, $\forall x \in V$ nad $\mathbb{C}$,

  tj. $\langle x|x\rangle \in \mathbb{R}$!

- $\forall x,y,z \in V$

  $\langle x|y+z\rangle = \langle x|y\rangle + \langle x|z\rangle$ (díky (K),(L2),(K))

- $\forall x,y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

  $\langle x|\alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x|y\rangle$

- $\forall x \in V$: $\langle x|0\rangle = 0$

  $\langle x|0 \cdot x\rangle = 0 \cdot \langle x|x\rangle$

Příklady:

- $\mathbb{R}^2$: $\langle x|y\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ — ověřte si axiomy

- pro regulární matici A: $\langle x|y\rangle = x^T A^T A y$

- standardní skal. součin na $\mathbb{C}^n$:

  $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = y^H \cdot x$ — hermitovská transpozice

- **NEPŘÍKLAD**: $\langle x|y\rangle = x^T y$ v $\mathbb{C}^n$ není sk. součin!

  (nezápornost neplatí)

Definice: Nechť V je VP nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Zobrazení $V \to \mathbb{R}$ (vždy do $\mathbb{R}$!), které vektoru x přiřazuje číslo $\|x\|$ se nazývá **norma**, pokud splňuje následující axiomy:

(P) $\forall x \in V: \|x\| \geq 0$ a $\|x\| = 0$ pouze pro $x = 0$

(L) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) $: \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(TN) $\forall x, y \in V: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

DÚ: ověřte pro $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$ - euklidovská norma

Norma odvozená ze skalárního součinu: zobrazení přiřazující vektoru x číslo $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$. Př.: $\sqrt{\sum x_i^2}$

Věta (Cauchy-Schwarzova nerovnost). Je-li V VP nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), a $\|x\|$ je norma odvozená ze sk. s., pak $\forall x, y \in V: |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Důkaz: pro $\mathbb{R}$: pokud $y = 0$, jasné. Předp. $y \neq 0$.

Uvažme kvadratický mnohočlen $p(t) = \underbrace{\langle x + t \cdot y | x + t \cdot y \rangle}_{\text{axiom (P)}: \geq 0} \overset{L1, L2}{=}$

$$= \underbrace{\langle x | x \rangle}_{\|x\|^2} + 2 \langle x | y \rangle \cdot t + \underbrace{\langle y | y \rangle}_{\|y\|^2} \cdot t^2$$

$\Rightarrow$ diskriminant musí být nekladný

$$4 \langle x | y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \blacksquare$$

pro $\mathbb{C}$: předp. $y \neq 0$. Zvolíme $t = -\frac{\langle x | y \rangle}{\|y\|^2}$. Pak

$$p(t) = \|x\|^2 - \frac{\langle x | y \rangle}{\|y\|^2} \langle y | x \rangle \underbrace{- \frac{\overline{\langle x | y \rangle}}{\|y\|^2} \langle x | y \rangle + \frac{\langle x | y \rangle \overline{\langle x | y \rangle}}{\|y\|^4} \langle y | y \rangle}_{=0}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{\langle x | y \rangle \overline{\langle x | y \rangle}}{\|y\|^2} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x | y \rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0 \quad \blacksquare$$

připomeňme: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Důsledek 1: Ve UP V nad $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) je norma odvozená ze skalárního součinu normou.

Dk: axiomy (P), (L) jasné

(TN): $\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y | x+y\rangle} = \sqrt{\langle x|x\rangle + \underbrace{\langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle}_{=\langle x|y\rangle + \overline{\langle y|x\rangle} \leq 2|\langle x|y\rangle|} + \langle y|y\rangle}$

$z + \bar{z} \leq 2|z|$

Cauchy-Schwarz

$\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|.$ ∎

Důsledek 2 (aritmetický a kvadratický průměr)

Nechť $x \in \mathbb{R}^n$. Pak

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

DÚ ?

Dk: vezmi $y = (1, \dots, 1)^T$.

Pak $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \|y\| = \sqrt{n}$

Cauchy-Schwarz: $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad \Big/ :n$

$$\frac{1}{n}\sum x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2}$$ ∎

KOLMOST

Definice: Vektory x, y ve VP V se skalárním souč. se nazývají **kolmé**, pokud $\langle x|y\rangle = 0$. Značíme: $x \perp y$.

⚠ Každý systém nenulových, navzájem kolmých vektorů je lineárně nezávislý.

dk: máme $v_1, \dots, v_k$, $\forall i \neq j$ $v_i \perp v_j$.

Sporem: Předp. že jsou lin. závislé, bůno: $v_1 = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v_i$.

$$\text{Pak } \langle v_1|v_1\rangle = \left\langle \sum_{i=2}^{k} \alpha_i v_i \,\middle|\, v_1 \right\rangle \overset{L1,L2}{=} \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle v_i|v_1\rangle}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow v_1 = 0$ – spor s nenulovostí. ∎

Definice: Báze $B = (v_1, \dots, v_n)$ VP V se skalár. součinem je **ortonormální**, pokud

- $\forall i \neq j$, $v_i \perp v_j$
- $\forall i$, $\|v_i\| = 1$.

Tvrzení: Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze VP V a $x \in V$. Pak platí:

$$x = \langle x|v_1\rangle v_1 + \langle x|v_2\rangle v_2 + \dots + \langle x|v_n\rangle v_n .$$

Smysl: je snadné získat souřadnice vektoru vůči ort. bázi.

Důkaz: nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou koeficienty tž. $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

$$\text{Pak } \forall j: \langle x|v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i|v_j\rangle = \alpha_j$$ ∎

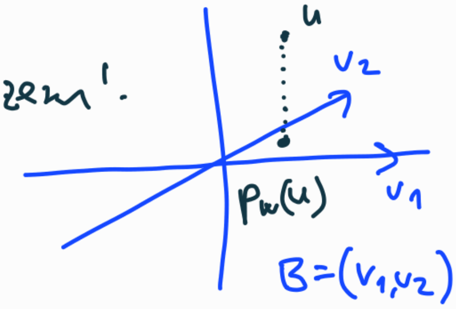
Koeficienty $\langle x|v_j\rangle$ … tzv. **Fourierovy koeficienty** vektoru x

Definice: Nechť W je podprostor VP V se skal. součinem a $B = (v_1, \dots, v_n)$ je ortonormální báze VP W. Pak zobrazení $p_W : V \to W$ definované předpisem

$$p_W(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle u | v_i \rangle \cdot v_i$$

se nazývá **ortogonální projekce** V na W.

Dú: Ověřte, že p_W je lineární zobrazení.

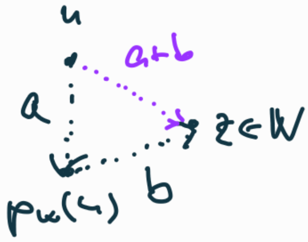


💡 $\forall j = 1, \dots, n: \quad (u - p_W(u)) \perp v_j$

dk: $\langle u - p_W(u) | v_j \rangle = \langle u - \sum_{i=1}^{n} \langle u | v_i \rangle v_i | v_j \rangle \overset{L1,L2}{=}$

$$\langle u | v_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \big(\langle u | v_i \rangle \underbrace{\langle v_i | v_j \rangle}_{\substack{=1 \text{ pro } i=j, \\ \text{jinak } 0}} \big) = \langle u | v_j \rangle - \langle u | v_j \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

Tvrzení: Vektor $p_W(u)$ je vektor z W, který je nejbližší k vektoru u (tj. $\forall z \in W, z \neq p_W(u): \| u - p_W(u) \| < \| u - z \|$).



Důkaz: uvažme libovolné $z \in W$ a trojúhelník $u, z, p_W(u)$.

označme $a = p_W(u) - u$, $b = z - p_W(u)$.

chceme: $\|a\| \overset{?}{<} \|a+b\|$ Dle 💡: $a \perp b$

$$\|a+b\|^2 = \langle a+b | a+b \rangle = \langle a | a \rangle + \overbrace{\langle a | b \rangle}^{=0} + \overbrace{\langle b | a \rangle}^{=0} + \underbrace{\langle b | b \rangle}_{>0} =$$

$$= \|a\|^2 + \|b\|^2 > \|a\|^2 \quad \blacksquare$$

Důsledek: Zobrazení p_W nezávisí na volbě báze B.