DETERMINANTY

LA 2 $\boxed{26/2/2025}$

Opakování:

Def: **Determinant** čtvercové matice $A \in T^{n\times n}$ je číslo $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)}$.

Platí:

i) Je-li
$$A = \begin{array}{c} \text{matice} \\ \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \end{array} \in T^{n\times n}, \quad \overset{\text{vektor}}{z^T \in T^n}, \quad \overset{\text{skaláry}}{\alpha, \beta \in T},$$

pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\det \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha v_i + \beta z & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det(A) + \beta \cdot \det \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & z & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} & \leftarrow \text{i-tý řádek} \end{array}$$

ii) Je-li A' matice vzniklá z A prohozením dvou řádků, pak $\det(A') = -\det(A)$.

iii) $\det(A^T) = \det(A)$

Pozn. díky iii), platí i) a ii) také pro sloupce

ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVY A DET.

Zajímá nás

1. jaký determinant mají matice ERÚ

2. co dělají ERÚ s determinantem

- vynásobení řádku i nenulovým t ← tohle už víme

$$E = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & t & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ i \end{array}$$

1. $\det(E) = t$

2. podle bodu i) věty:

$$\det(E \cdot A) = t \cdot \det(A) = \det(E) \cdot \det(A)$$

- přičtení t-násobku řádku j k řádku $i \neq j$

$$E = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & t & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. $\det(E) = 1$

2. podle bodu i) v předešlé větě: $\det(E \cdot A) = \det(A) = \det(E) \cdot \det(A)$

na okraj - DÚ

- prohození dvou řádků $i \neq j$

$$E = \begin{array}{c} \quad i \quad j \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \end{array}$$

1. $\det(E) = -1$

2. podle bodu ii) v předešlé větě: $\det(E \cdot A) = -\det(A) = \det(E) \cdot \det(A)$

⇒ Dostáváme:

Lemma: Nechť $A \in T^{n \times n}$ a E je matice nějaké ERÚ. Pak platí: $\det(E \cdot A) = \det(E) \cdot \det(A)$.

Uvažme posloupnost ERÚ a jejich matice $E_1, \dots, E_k$, a matici A.

Pak $\det(E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A) = \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A) =$

$= \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1}) \cdot \det(E_{k-2} \cdots E_2 E_1 A) = \dots =$

$= \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1}) \cdots \det(E_2) \cdot \det(E_1) \cdot \det(A)$

Označme $F = E_k E_{k-1} \cdots E_1$.

Pak: • matice úprav má vždy nenulový determinant ⌂
(protože $\det(F) = \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1}) \cdots \det(E_1)$)

• $\det(F \cdot A) = \det(F) \cdot \det(A)$ *

Věta: i) Matice $A \in T^{n \times n}$ je regulární, právě když $\det(A) \neq 0$.

ii) Gaussova eliminace umožňuje výpočet $\det(A)$:

$$\det(A) = \frac{\det(F \cdot A)}{\det(F)}$$ matice v trojúhelníkovém tvaru

iii) Pro každé $A, B \in T^{n \times n}$ platí:

$$\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$$

Důkaz: i) Uvaž úpravy vedoucí do redukovaného odst. tvaru

pro A regulární dostaneme $F \cdot A = I$

$\Rightarrow \det(F \cdot A) \overset{*}{=} \det(F) \cdot \det(A) = \det(I) = 1$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

pro A singulární má $F \cdot A$ nulový řádek ⌂

$\Rightarrow 0 = \det(F \cdot A) \overset{*}{=} \det(F) \cdot \det(A) \Longrightarrow \det(A) = 0$

ii) jsme už odvodili – *

iii) jsme odvodili pro případ, že B je součinem matic EÚ (*), což je každá regulární.

Je-li B singulární, pak BA je taky singulární, tudíž $\det(BA) \underset{\uparrow}{=} 0 = \det(A)$. ∎

plyne z ii)

Věta (Cramerovo pravidlo): Nechť $A \in T^{n\times n}$ je regulární matice a $b \in T^n$. Pak pro (jediné) řešení soustavy $Ax=b$ platí, pro $i=1,\dots,n$:

$$x_i = \frac{\det(A_{i\to b})}{\det(A)},$$ kde

$A_{i\to b}$ je matice vzniklá z A nahrazením i-tého sloupce vektorem b.

Důkaz: Víme: $x = A^{-1}\cdot b$ – řešení.

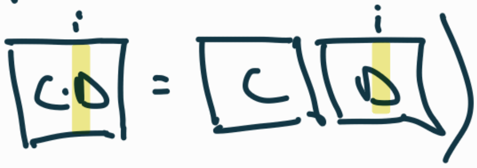
Pro $i \in \{1,\dots,n\}$, mějme $I_i := I_{i\to A^{-1}b} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & \boxed{A^{-1}b} & & \\ 0 & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$.

tj. I_i vznikla z I nahrazením sloupce i vektorem $A^{-1}b$

Pak • $A_{i\to b} = A\cdot I_i$

• $\det(I_i) = x_i$.

(i-tý sloupec $C\cdot D$ = $C\cdot D_i$



)

$\Rightarrow$ podle předchozí věty, třetí část:

$$\det(A_{i\to b}) = \det(A\cdot I_i) = \det(A)\cdot\det(I_i) = \det(A)\cdot x_i$$

neboli $$x_i = \frac{\det(A_{i\to b})}{\det(A)}$$ ∎

VZOREC PRO INVERZNÍ MATICI

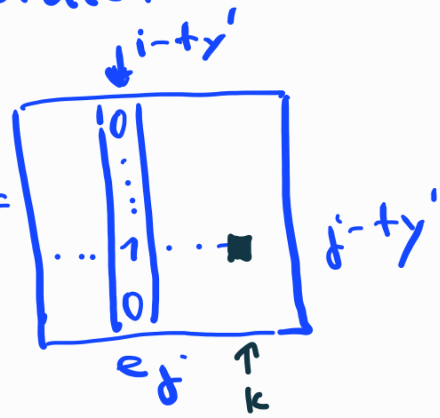
Víme: B je inverzní k A $\cdots n\times n$ pokud $A\cdot B = I$

Protože $I = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$, pro výpočet $B = A^{-1}$

stačí vyřešit $\underline{n}$ soustav $Ax = e_j$

- Pro každé e_j použijeme Cramerovo pravidlo:

$$x_i = \frac{\det(A_{i\to e_j})}{\det(A)}$$

$A_{i\to e_j} =$ 

- Všimneme si, že $\det(A_{i\to e_j})$

vůbec nezávisí na řádku j matice A!

Proč? pro každé $\pi \in S_n$ platí: když $\pi(j) = k \neq i$,

tak $A_{\pi^{-1}(i),i} = 0$ – π do det nic nepřispěje.

$\Rightarrow$ označme A^{ji} matici $(n-1)\times(n-1)$ vzniklou z A

vynecháním j-tého řádku a i-tého sloupce

Lemma: $\det(A_{i\to e_j}) = (-1)^{i+j}\det(A^{ji})$

Důkaz: Postupně $(n-j)$-krát prohodíme původní

j-tý řádek matice $A_{i\to e_j}$ s řádkem pod ním,

pak $(n-i)$-krát prohodíme původní i-tý sloupec

s vedlejším sloupcem napravo.

Dostaneme matici $B = \begin{pmatrix} A^{ji} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \cdots & 1 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ podle věty z minula

Víme: každé prohození změnilo znaménko,

tedy $\det(A_{i\to e_j}) = (-1)^{n-i+n-j}\cdot \det(B) =$

$= (-1)^{i+j}\cdot \det(B) = (-1)^{i+j}\det(A^{ji})$

Dále využijeme definice det:

$$\boxed{\det(B)} = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot \prod_{k=1}^{n} B_{k\pi(k)} =$$

$$\underbrace{=}_{\text{pro } l\neq n,\ B_{nl}=0} \sum_{\substack{\pi\in S_n:\\ \pi(n)=n}} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot \prod_{k=1}^{n-1} B_{k\pi(k)}$$

$$= \sum_{\pi\in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot \prod_{k=1}^{n-1} B_{k\pi(k)} = \boxed{\det(A^{ji})}$$

∎

Dokázali jsme:

Věta Je-li $A\in T^{n\times n}$ regulární matice,

pak $$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\cdot \det(A^{ji})}{\det(A)}.$$

Věta (Laplaceův rozvoj): Pro každé $i\in\{1,\dots,n\}$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\cdot a_{ji}\cdot \det(A^{ji}).$$

Důkaz:

i-tý sloupec A lze rozepsat jako $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\cdot e_j$

Podle věty o linearitě determinantu platí:

už umíme

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\cdot \det(A_{i\to e_j}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\cdot(-1)^{i+j}\cdot \det(A^{ji}).$$ ∎