Připomenutí: (LA2 14/5/25)

Def: Zobrazení $f : V \times V \to T$ se nazývá bilineární forma na V, pokud je lineární v obou složkách.

Zobrazení $g : V \to T$ se nazývá kvadratickou formou, pokud $\exists$ bilineární forma f t.ž. $\forall u \in V$, $g(u) = f(u,u)$.

Symetrická bilineární forma: $\forall x,y \in V : f(x,y) = f(y,x)$

Matice bilineární formy f vzhledem k bázi $B = (b_1, \dots, b_n)$:

$$A_{ij} = f(b_i, b_j) \leftarrow \text{jak se } f \text{ chová na bázi } B$$

Matice kvadratické formy g vzhledem k bázi B: matice symetrické bilin. formy f t.ž. $g(u) = f(u,u)$, pokud existuje

Pozorování 1: Je-li A matice bilineární formy f vůči bázi B, pak $\forall u,v \in V$: $f(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$.

Smysl: každou bilineární formu (tedy i kvadratickou) můžeme reprezentovat pomocí matice.

(nebo kvadratické)

Pozorování 2: Nechť A je matice bilin. formy f vzhledem k bázi B. Pak ${}_B[id]_C^T \cdot A \cdot {}_B[id]_C$ je matice f vůči bázi $C = (c_1, \dots, c_n)$.

matice přechodu od báze C k bázi B

Důkaz: víme: $[u]_B = {}_B[id]_C \cdot [u]_C$

$$[v]_B = {}_B[id]_C \, [v]_C$$

$=: \bar{A}$ - symetrická

$$f(u,v) \overset{\text{Pozorování 1}}{=} [u]_B^T \cdot A \cdot [v]_B = [u]_C^T \boxed{{}_B[id]_C^T \, A \, {}_B[id]_C} \cdot [v]_C$$

$\Rightarrow \forall i,j : f(c_i, c_j) = e_i^T \cdot \bar{A} \cdot e_j = \bar{A}_{ij}$,

neboli $\bar{A}$ je matice f vzhledem k bázi C. ∎

Chtěli bychom bázi, vůči které bude matice formy pěkná – diagonální.

LA 12/1

Věta: Nechť f je symetrická bilineární forma na VP V nad T, charakteristiky $\neq 2$. Pak existuje báze B tž. matice f vůči B je diagonální.

Důkaz: Uvaž libovolnou bázi B' a matici A formy f vůči B'. jinak trochu pečlivěji

A je symetrická. Pokud A je reálná, pak víme že $\exists R$ ortogonální tž. $R^T \cdot A \cdot R$ je diagonální.

Nechť $B = (b_1, \dots, b_n)$ je báze tž. ${}_{B'}[id]_B = R$, tj. $[b_i]_{B'} = R_{*i}$ ← i-tý sloupec R

Pak podle Pozorování 2, ${}_{B'}[id]_B^T \, A \, {}_{B'}[id]_B$ je matice f vůči B. □

Obecnější situace - symetrická matice $A \in T^{n \times n}$

Znovu využití Gaussovy eliminace a indukce.

Ukážeme

1. $\exists$ reg. matice E tž. Pozor: E nemusí být dolní $\triangle$

$$E \cdot A \cdot E^T = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

, kde B je symetrická.

Pokud $A_{1*} = (\alpha\ 0 \cdots 0)^T$, stačí vzít $E = I$ a je hotovo.

Jinak rozlišíme dva případy

i. $A_{11} \neq 0$ - stačí ERÚ typu 3 - přičti řádek 1 k řádku i

bud' E matice ERÚ typu 3 která upraví A do podoby

$$E \cdot A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & ? & ? & ? \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Pak $E \cdot A \cdot E^T$ má požadovaný tvar.

ii. $A_{11} = 0$ - buď E_+ matice ERÚ úpravy přičti řádek i k řádku 1 kde i je tž. $A_{i1} \neq 0$ (jistě existuje)

Pak $E_+ \cdot A \cdot E_+^T$ je symetrická, s pozicí 1,1 nenulovou, (nejsme v $\mathbb{Z}_2$) a podle bodu i existuje matice E tž. $E \cdot E_+ \cdot A \cdot E_+^T \cdot E^T$ je požadovaného tvaru.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & F^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & F\cdot B\cdot F^T \end{pmatrix}$ (1. semestr)

3. Celé tvrzení dostaneme indukcí:

- pro $n=1$ jasné
- $n \to n+1$: Podle bodu 1. $\exists$ reg. E tž. $E\cdot A\cdot E^T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & B \end{pmatrix}$

Podle ind. předp. $\exists$ reg. F tž. $F\cdot B\cdot F^T$ je diagonální

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & F \end{pmatrix} E\cdot A\cdot E^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & F^T \end{pmatrix} \overset{1.}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & F^T \end{pmatrix} \overset{2.}{=} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{smallmatrix} & FBF^T \end{pmatrix} \quad \square$$

Pozor: na diagonále nemusí být vlastní čísla!

Důsledek (Sylvestrův zákon setrvačnosti kvadratických forem)

Pro každou kvadratickou formu g na VP konečné dim. nad $\mathbb{R}$ existuje báze, vůči níž má g diagonální matici pouze s $0, 1, -1$. Navíc počet 1 a počet -1 je pro každou takovou bázi stejný.

Důkaz: Nechť f je symetrická bilin. forma určující g, tedy $\forall v \in V$, $g(v) = f(v,v)$.

Dle předešlé věty existuje báze B tž. matice f vůči B je diagonální – ozn. D

Nechť S a D' jsou diagonální matice definované takto:

pro i tž. $D_{ii} = 0$: $S_{ii} = 1$, $D'_{ii} = 0$

— " — $D_{ii} > 0$: $S_{ii} = \sqrt{D_{ii}}$, $D'_{ii} = 1$

— " — $D_{ii} < 0$: $S_{ii} = \sqrt{-D_{ii}}$, $D'_{ii} = -1$

Pak $D = S^T \cdot D' \cdot S$, a protože S je regulární, $D' = (S^T)^{-1} \cdot D \cdot S^{-1}$ je diagonální matice pouze s $0, 1, -1$, a z konstrukce je to matice kvadratické formy g vůči nějaké bázi.

Jednoznačnost počtu 0, 1, -1:

Nechť D a D' jsou matice kvadr. formy g vůči dvěma regulárním různým bázím - B, C. Pak $[id]_{C}^{B\,T} \cdot D \cdot [id]_{C}^{B} = D'$

$\Rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A') \Rightarrow$ stejný počet 0.

Označme $B = (b_1, \dots, b_n)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$

Jinak v D i D' jsou na diagonále nejprve +1, pak -1, pak 0.
(permutují vektory v bázích)

$p \dots \# 1$ v D
$q \dots \# 1$ v D'
Pro spor předpokládejme $q < p$.

Nechť $P = \mathcal{L}(\{b_1, \dots, b_p\})$ - lineární obal $b_1, \dots, b_p$
$Q = \mathcal{L}(\{c_{q+1}, \dots, c_n\})$.

Protože $\dim(P) + \dim(Q) = p + n - q > n$,

existuje $v \in P \cap Q$:

$$\Rightarrow \quad v = \sum_{i=1}^{p} \beta_i b_i = \sum_{j=q+1}^{n} \gamma_j c_j, \text{ pro vhodná } \beta_i, \gamma_j.$$

Pak ale: $$g(v) = [v]_B^T \cdot D \cdot [v]_B = \sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 > 0$$
$$= [v]_C^T \cdot D' \cdot [v]_C = \sum_{j=q+1}^{n} (-1) \cdot \gamma_j^2 \leq 0$$
spor

$\Rightarrow q \geq p$. Symetricky dostaneme $p \geq q \Rightarrow p = q$ ∎

Příklad: nechť $g(x) = x^T A x$, pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

Najdeme rozklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & -1 & \\ & 1 & 1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}}^{D} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & -1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Pak pro

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \sqrt{3} & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ máme $D = S^T D' S$.

Důsledek: v $\mathbb{R}^2$ existuje 6 typů kvadratických forem:

- klasifikace podle typů diagonální matice s $0, 1, -1$:

"parabola 3D"	pringles	otočená "parabola 3D"	parabola 2D		rovina
$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \\ & 0 \end{pmatrix}$
$x_1^2 + x_2^2$	$x_1^2 - x_2^2$	$-x_1^2 - x_2^2$	x_1^2	$-x_1^2$	0

$$\underbrace{x_1^2 + x_2^2 \qquad x_1^2 - x_2^2 \qquad -x_1^2 - x_2^2}_{\text{paraboloid}}$$

- satelitní anténa
- zrcadlo světla
- olympijský oheň

---

v $\mathbb{R}^1$ jsou 3 typy:

parabola		
(1)	(-1)	(0)
x_1^2	$-x_1^2$	0