METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

(doplnění k ortogonalitě / skalárním součinu)

Uvažme neřešitelnou soustavu $Ax=b$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Co to znamená?

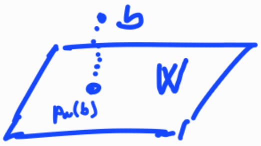
chceme najít x, které soustavu porušuje co nejméně

Připomeňme možnou interpretaci $Ax=b$: hledáme lineární kombinaci sloupců matice A, která dá b.

Označme $W = \mathcal{S}(A)$ - sloupcový prostor A.

Pokud $Ax=b$ nemá řešení - b nepatří do W.

<u>Nápad</u>: spočteme projekci $p_W(b)$ vektoru b do W, a řešme $Ax = p_W(b)$.



Pak • jistě <u>existuje</u> řešení - ozn. $\bar{x}$

• navíc $\|A\bar{x}-b\| = \|p_W(b)-b\| = \min_{y\in W}\|y-b\| = \min_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-b\|$

tj. $\bar{x}$ je takové, že vzdálenost $A\bar{x}$ a b je nejmenší možná

↑ to jsme chtěli.

<u>Všimni si</u>: díky monotónnosti druhé mocniny, úlohy

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-b\| \quad \text{a} \quad \min_{x\in\mathbb{R}^n}\|Ax-b\|^2 = \underbrace{\min_{x\in\mathbb{R}^n}\sum_i (A_{i*}x-b_i)^2}_{\text{nejmenší čtverce}}$$

mají stejné optimum.

Označme $\mathcal{O} = \{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax = p_W(b)\}$ množinu nejlepších přibližných řešení $Ax=b$.

Tvrzení: Pro $\mathcal{O}' = \{x\in\mathbb{R}^n \mid A^TAx = A^Tb\}$ platí: $\mathcal{O}=\mathcal{O}'$.

<u>Důkaz</u>: víme: $(b-p_W(b)) \perp W = \mathcal{S}(A) = \mathcal{R}(A^T)$, tj. $b-p_W(b)\in \mathrm{Ker}(A^T)$

uvaž $x\in\mathcal{O}$:

$$Ax = p_W(b) \Rightarrow A^T(\underbrace{Ax-p_W(b)}_{\mathcal{S}(A)}) = 0 \Leftrightarrow Ax-p_W(b)\in\mathrm{Ker}(A^T) \Leftrightarrow$$

$$b-Ax\in\mathrm{Ker}(A^T) \Leftrightarrow A^T(b-Ax)=0 \Leftrightarrow A^TAx = A^Tb.$$

Opačně: všimni si: $Ax-p_W(b)\in\mathcal{S}(A) \Rightarrow$ když je $Ax-p_W(b)\perp\mathcal{S}(A)$

$\Rightarrow Ax-p_W(b)=0$

<u>Důsledek</u>: způsob řešení.

BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

Připomeňme si: skalární součin je zobrazení $\overset{VP}{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \to \overset{T}{\mathbb{R}}$ s nějakými vlastnostmi (L, P, K). Lze vyjádřit předpisem $\langle x|y\rangle = x^T A y$, kde $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivně def. matice

---

Nechť V je VP nad T.

__Def:__ Zobrazení $f: V\times V\to T$, které dvojici vektorů $x,y\in V$ přiřazuje skalár $f(u,v)$ se nazývá **bilineární forma na V**, pokud splňuje následující axiomy:

(L1) $\forall x,y,z\in V,\ \forall t\in T:\ f(x+t\cdot y, z) = f(x,z)+t\cdot f(y,z)$

(L2) — " — : $f(x, y+t\cdot z) = f(x,y)+t\cdot f(x,z)$

Zobrazení $g: V\to T$ se nazývá **kvadratickou formou**, pokud pro nějakou bilineární formu f platí: $\forall u\in V,\ g(u)=f(u,u)$.

Bilineární forma f je **symetrická**, pokud $\forall x,y\in V: f(x,y)=f(y,x)$.

__Věta:__ S výjimkou těles charakteristiky 2 platí:

i) Symetrická bilineární forma f na VP V nad T, je jednoznačně určena hodnotami $f(u,u)$, $\forall u\in V$.

ii) Je-li g kvadr. forma na VP V nad T, pak existuje symetrická bilineární forma f' t.ž. $g(u)=f'(u,u)$ $\forall u\in V$.

__Důkaz:__ i) Uvaž libovolné $u,v\in V$. Pak

$$f(u+v,u+v) \overset{L1,L2}{=} f(u,u)+f(u,v)+f(v,u)+f(v,v)$$

$$\Rightarrow f(u,v)+f(v,u) = \underbrace{f(u+v,u+v)-f(u,u)-f(v,v)}_{*} \qquad \left(\tfrac12 \text{ je } (1+1)^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow f(u,v) \overset{\text{symetrie}}{=} \tfrac12\big(f(u,v)+f(v,u)\big) = \tfrac12\big(f(u+v,u+v)-f(u,u)-f(v,v)\big)$$

ii) Nechť $f'(u,v)=\frac12\big(f(u,v)+f(v,u)\big)$, kde f určuje g.
Pak • f' je symetrická, • $g(u)=f'(u,u)$, $\forall u\in V$. ■

Pozn.: v $\mathbb{Z}_2$ je (*) rovna $2\cdot f(u,v)=0 \Rightarrow f(u,v)$ nevyjádříme.

Def: Nechť $B=(b_1,\dots,b_n)$ je báze VP V nad T.
Matice bilineární formy f vzhledem k bázi B je matice A daná předpisem: $A_{ij}=f(b_i,b_j)$. jak se chová báze

Matice kvadratické formy g vzhledem k bázi B je daná matice symetrické bilin. formy f t.ž. $g(u)=f(u,u)$, $\forall u\in V$, pokud taková f existuje.

Pozn. 1 Uvaž bilineární formu f na VP $\mathbb{Z}_2^2$ nad $\mathbb{Z}_2$, jejíž matice vůči kanonické bázi je $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, a kvadratickou formu $g(u)=f(u,u)$.
Pak pro g neexistuje symetrická bilin. forma –
DÚ - rozmyslete si.

Pozn. 2 Vzhledem jednoznačnosti symetrické bilin. formy určující g (viz minulá věta), je definice korektní.

Je-li f bilineární forma na VP V nad tělesem T jiné charakteristiky než 2, a A její matice vzhledem k bázi $B=(b_1,\dots,b_n)$, pak matice C kvadr. formy $g(u)=f(u,u)$ vzhledem k B je dána předpisem
$$C_{ij}=\frac{A_{ij}+A_{ji}}{2}.$$

Dk: Už víme z předchozího důkazu, že symetrická bilin. forma f' určující kvadratickou formu g je dána vztahem $f'(u,v)=\frac{f(u,v)+f(v,u)}{2}$, $\forall u,v\in V$,

proto $C_{ij}=f'(b_i,b_j)=\frac{A_{ij}+A_{ji}}{2}$. ∎

Pozorování 1: Je-li A matice bilineární formy f vůči bázi B, pak $\forall u,v \in V$: $f(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$.

Důkaz: Označme $B = (b_1, \dots, b_n)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ t.ž. $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$, $v = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j$.

Pak $f(u,v) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^n \beta_j b_j\right) \overset{L1,2}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j f(b_i, b_j) =$

$= [u]_B^T A [v]_B$. ∎

Smysl: každou bilineární formu (tedy i kvadratickou) můžeme reprezentovat pomocí matice.

Opak je zřejmý: pro každou čtvercovou matici $A \in T^{n \times n}$ a bázi B VP V nad T určuje předpis $\forall u,v \in V$: $f(u,v) = [u]_B^T A [v]_B$ bilin. formu na V.

na okraj: Uvažme VP V nad T a nechť F je množina všech bilin. forem na V. Pak F je VP nad T. ($\sim$ VP všech matic $n \times n$)

Př. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad f(x,y) = x^T A y$ ... bilin. forma na $\mathbb{R}^2$

$g(x) = f(x,x) = x_1^2 + 5x_1x_2 + 3x_2x_1 + 2x_2^2 =$

$= x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 2x_2^2 = f'(x,x)$

Pro $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $f'(x,y) = x^T A' y$ symetrická bilin. forma, která určuje g.

A je také matice f vůči kanonické bázi.
A' —— " —— f' —— " ——

(nebo: kvadratické)

Pozorování 2: Nechť A je matice bilin. formy f vzhledem k bázi B. Pak ${}_B[id]_C^T \cdot A \cdot {}_B[id]_C$ je matice f vůči bázi $C = (c_1, \dots, c_n)$.

Důkaz: víme: $[u]_B = {}_B[id]_C \cdot [u]_C$ ← matice přechodu od báze C k bázi B

$$[v]_B = {}_B[id]_C \, [v]_C$$

$$f(u,v) \overset{\text{Pozorování 1}}{=} [u]_B^T \cdot A \cdot [v]_B = [u]_C^T \underbrace{\boxed{{}_B[id]_C^T \, A \, {}_B[id]_C}}_{=:\bar{A}} \cdot [v]_C$$

$$\Rightarrow \forall i,j : f(c_i, c_j) = e_i^T \cdot \bar{A} \cdot e_j = \bar{A}_{ij}$$ ∎

Chtěli bychom bázi, vůči které bude matice formy pěkná – diagonální.

Věta: Nechť f je symetrická bilineární forma na VP V nad T, charakteristiky $\neq 2$. Pak existuje báze B tž. matice f vůči B je diagonální.

Důkaz: Uvaž libovolnou bázi B' a matici A formy f vůči B'. A je symetrická. Pokud A je reálná, pak už víme že $\exists R$ tž. $R^T \cdot A \cdot R$ je diagonální. (jinak trochu pečlivěji)

Nechť $B = (b_1, \dots, b_n)$ je báze tž. ${}_{B'}[id]_B = R$, tj. $[b_i]_{B'} = R_{*i}$ (i-tý sloupec).

Pak podle Pozorování 2, ${}_{B'}[id]_B^T \, A \, {}_{B'}[id]_B$ je matice f vůči B. □

Obecnější situace – symetrická matice $A \in T^{n \times n}$

Znovu využití Gaussovy eliminace a indukce.

Ukážeme **1.** $\exists$ matice E tž.

$$E \cdot A \cdot E^T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & B \end{pmatrix}$$

, kde B je symetrická.

Pozor: E nemusí být dolní △

Pokud $A_{1*} = (\alpha \; 0 \cdots 0)^T$, stačí vzít $E = I$ a je hotovo.

Jinak rozlišíme dva případy

i. $A_{11} \neq 0$ - stačí ERÚ typu 3: přičti řádek 1 k řádku i

bud E matice ERÚ typu 3 která upraví A do podoby
$$E \cdot A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & ? & ? & ? \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Pak $E \cdot A \cdot E^T$ má požadovaný tvar.

ii. $A_{11} = 0$ - buď E_+ matice ERÚ úpravy přičti řádek i k řádku 1 kde i je tž. $A_{i1} \neq 0$ (jistě existuje)

Pak $E_+ \cdot A \cdot E_+^T$ je symetrická, s pozicí 1,1 nenulovou, (nejsme v $\mathbb{Z}_2$) a podle bodu i existuje matice E tž. $E \cdot E_+ \cdot A \cdot E_+^T \cdot E^T$ je požadovaného tvaru.

2.
$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F^T & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F \cdot B \cdot F^T & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$
(1. semestr)

3. Celé tvrzení dostaneme indukcí:

- pro $n = 1$ jasné
- $n \to n+1$: Podle bodu 1. $\exists$ E tž. $E \cdot A \cdot E^T = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$

Podle ind. předp. $\exists$ F tž. $F \cdot B \cdot F^T$ je diagonální

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{array}\right) E \cdot A \cdot E^T \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F^T & \\ 0 & & & \end{array}\right) \overset{1.}{=} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & F^T & \\ 0 & & & \end{array}\right) \overset{2.}{=} \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & FBF^T & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \square$$

<u>Pozor</u>: na diagonále nemusí být vlastní čísla!

<u>Důsledek</u> (Sylvestrův zákon setrvačnosti kvadratických forem)

Pro každou kvadratickou formu g na VP konečné dim. nad $\mathbb{R}$ existuje báze, vůči níž má g <u>diagonální</u> matici pouze s $0, 1, -1$. Navíc <u>počet 1</u> a <u>počet -1</u> je pro každou takovou bázi <u>stejný</u>.