POZITIVNĚ DEFINITNÍ MATICE - opak.

Def: Symetrická reálná matice A, $n \times n$, je **pozitivně definitní**, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $x^T A x > 0$.

pozitivně semidefinitní, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $x^T A x \geq 0$.

Věta (Charakterizace pozitivně definitních matic)

Pro čtverc. sym. A jsou následující podmínky ekvivalentní:

i) A je pozitivně definitní,

ii) všechna vlastní čísla A jsou kladná, $\Longrightarrow$ $\det(A) > 0$ regulární

iii) existuje regulární matice U t.ž. $A = U^T U$,

iv) existuje regul. horní trojúhel. R s kladnou diagonálou t.ž. $A = R^T R$. tzv. Choleského dekompozice

Věta (Sylvestrovo kritérium). Sym. mat. A, $n \times n$, je pozit. def. $\Longleftrightarrow \forall i = 1, \dots, n$, $\det(A_i) > 0$, kde A_i je podmatice prvních i řádků a sloupců.

Malá pozorování:

💡1: Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a R je regulární matice, $n \times n$. Pak A je pozitivně definitní $\Longleftrightarrow$ $R^T A R$ je pozit. def.

dk. např. díky bodu iii)

A je PDF $\Longleftrightarrow \exists$ regul. U t.ž. $A = U^T U \Longleftrightarrow \exists$ reg. U t.ž. $R^T A R = R^T U^T U R$

$\Longleftrightarrow R^T A R$ je PDF. ■

💡2: Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je tvaru $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Pak A je pozitivně definitní $\Longleftrightarrow \alpha > 0$ a zároveň B je pozitivně def.

dk. $\Longrightarrow$ uvaž $x = (1, 0, \dots, 0)^T$: $0 < x^T A x = \alpha$

pro libovolné $x \in \mathbb{R}^{n-1}, x \neq 0$: $x^T B x = (0, x^T) A \binom{0}{x} > 0$

$\Longleftarrow$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$: $x^T A x = x_1^2 \alpha + \tilde{x}^T B \tilde{x} > 0$

kde $\tilde{x} = (x_2, \dots, x_n)$. $\Downarrow$ $x_1 \neq 0$ nebo $\tilde{x} \neq 0$ ■

Věta (Rekurentní podmínka na PDF).

Matice $A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline a & B \end{array}\right]$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$, $B \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$,

je pozitivně definitní právě když
i) $\alpha > 0$, a zároveň
ii) $B - \frac{a}{\alpha} a^T$ je pozitivně def.

Důkaz: Nechť E je matice posloupnosti ERÚ typu přičti t-násobek řádku j k řádku i, $j < i$, která vynuluje sloupec pod $A_{11} = \alpha$: $E \cdot A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & ? \\ 0 & \end{array}\right]$

Zajímá nás: co se stane s B, resp. co budou ERÚ dělat?

uvažme i-tý řádek A: $(a_{i-1} \quad B_{i-1*})$ ← řádek $i-1$ matice B

přičteme k němu $\left(-\frac{a_{i-1}}{\alpha}\right)$-násobek $1.$ řádku (α, a^T)

neboli k matici B přičítáme matici $-\frac{a}{\alpha} \cdot a^T$

∴ jen sloupce $2, \dots, n$ matice A

$$\Rightarrow E \cdot A = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & B - \frac{a}{\alpha} a^T \\ 0 & \end{array}\right] \quad \text{a} \quad E = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline -\frac{a_1}{\alpha} & 1 & & & \\ -\frac{a_2}{\alpha} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n-1}}{\alpha} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow E \cdot A \cdot E^T = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & a^T \\ \hline 0 & \\ \vdots & \underline{B - \frac{a}{\alpha} a^T} \\ 0 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & -a^T/\alpha & \\ \hline 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \underline{B - \frac{a}{\alpha} a^T} \\ 0 & \end{array}\right]$$

tato část je stejná

Podle 1 a 2: A je PDF $\Leftrightarrow$ EAE^T je PDF $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$ & $B - \frac{a}{\alpha} a^T$ je PDF. ∎

Důsledek 1 (Gaussova eliminace jako test na PDF).
Matice A je pozitivně definitní právě když ji Gaussova eliminace používající pouze EŘÚ přidá t-násobek řádku j k řádku i, $j < i$ } označme omezení $(*)$
převede do odstupňovaného tvaru s kladnou diagonálou.

Pozn. už jsme dokázali (americky) při důkazu Sylvestrovy podmínky. teď jiný důkaz.

Důkaz: indukcí podle velikosti matice, A_{11}
$n=1$ · víme: A je PDF $\Leftrightarrow$ $\det(A) > 0$ ✓

$n-1 \to n$: Dle věty: A je PDF $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$ & $B - \frac{a}{\alpha}a^T$ je PDF

Dle ind. předp. $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$ & Gauss. eliminace $(*)$ převede $B - \frac{a}{\alpha}a^T$ do odst. tvaru s kladnou diag.
$\Leftrightarrow$ Gauss. eliminace $(*)$ převede A do .... ☒

Důsledek 2 (Výpočet Choleského rozkladu Gauss. eliminací).
Nechť A je pozitivně definitní matice a $\bar{U}$ její odstupňovaný tvar získaný Gaussovou eliminací pouze EŘÚ přidá t-násobek řádku j k řádku i, $j < i$. $(*)$
Označme D diagonální matici t.ž. $D_{ii} = \bar{U}_{ii}$, $\forall i = 1, \dots, n$, a nechť $U = D^{-1} \cdot \bar{U}$. Pak $A = U^T D \cdot U$ a D má kladnou diag.

Důkaz: nechť E je matice pouze EŘÚ $(*)$ t.ž. $EA = \bar{U}$.
Víme: • $EAE^T = D$, kde D je diagonální kladná (např. důkaz Sylvestr. podmínky)
• $\bar{U}$ a D mají stejnou diagonálu.

$A = E^{-1} D (E^T)^{-1}$ chceme $(E^T)^{-1}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{(E^T)^{-1} = D^{-1} \cdot E \cdot A = D^{-1} \cdot \bar{U} = U}$ $\Rightarrow A = U^T \cdot D \cdot U$

Protože D má kladnou diagonálu, máme i Choleského rozklad: pro $R = \sqrt{D} \cdot U$ platí: $A = R^T \cdot R$
a R je horní trojúhelníková s kladnou diag.
(Obě U i D mají kladnou diag.)

☒

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

Gaussova eliminace:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 18 \end{pmatrix} \sim \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{pmatrix}}^{\bar{U}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 11/2 \end{pmatrix}}^{D} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{U}$$

kontrola

$$U^T D U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}}_{U^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 11/2 \end{pmatrix}}_{D \cdot U} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 20 \end{pmatrix} = A.$$

Věta: Choleského rozklad je jednoznačný.

Dk: $A = R^T R = P^T P$, R, P - horní trojú. matice s kladnou diagonálou

$$\underbrace{\underbrace{R P^{-1}}_{\text{obě horní } \Delta}}_{\text{výsledek horní } \Delta} = \underbrace{\underbrace{(R^T)^{-1} P^T}_{\text{obě dolní } \Delta}}_{\text{dolní } \Delta} \implies \underline{\text{diagonální}}$$

Platí: $\underline{RP^{-1} = D} = \underbrace{(R^T)^{-1} P^T}$ D je symetrická

tj. $R = D \cdot P$

$$\underline{D^{-1}} = (P^T)^{-1} \cdot R^T = \underline{RP^{-1}}$$

$\implies D = D^{-1}$, tj. D má na diagonále jen ± 1.

Kdyby $\exists i$ t.ž. $D_{ii} = -1$, pak $R_{ii} = -P_{ii}$ díky $R = D \cdot P$

spor s tím, že obě matice P a R mají kladnou diag.

$\implies \forall i$, $D_{ii} = 1$, tj. $D = I$. Proto $\underline{R} = DP = \underline{P}$. ■