DETERMINANTY

LA 2 | 19/12/2025

Organizační: • díky za anketu!

špatná čitelnost → ozvěte se

(• v létě (či dříve) bude ještě zkouška z LA 1)

• cvičení: včas řešte těžkosti

• nesmělý návrh: zapomeňte na zkoušku, soustřeďte se na obsah!

• ZODPOVĚDNOSTI: JÁ - VYSVĚTLUJU
VY - NAUČIT SE

• JAK? < PROČ?

• poznámky na webu

Navazujeme na LA1!

- soustavy lin. rovnic (el. úpravy) - permutace
- matice - regulární, singulární
- VP, báze, souřadnice
- lineární zobrazení

$\boxed{\text{KLÍČOVÝ POJEM: LINEÁRNÍ KOMBINACE}}$

Dva důležité pohledy na matice. Oba potřebné.

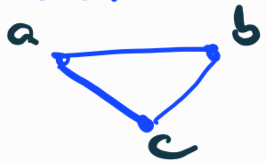
(ozdoba vs. nástroj)

1. statický: nehybná věc - data

např.

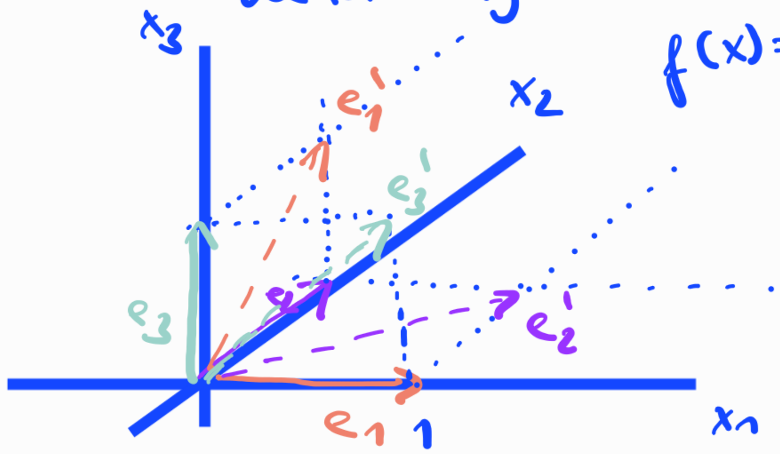
$$A = \begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right. & & \left.\right) & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \end{array}$$

- hezký minimalistický obrázek
- reprezentace grafu - matice sousednosti



2. dynamický: zařízení, které něco dělá - tj. lineární zobrazení

$f(x) = Ax$



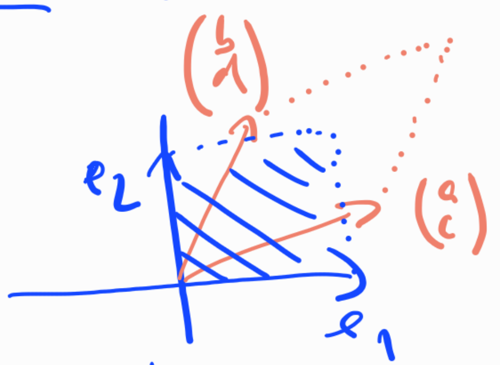
$e_1' = A e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

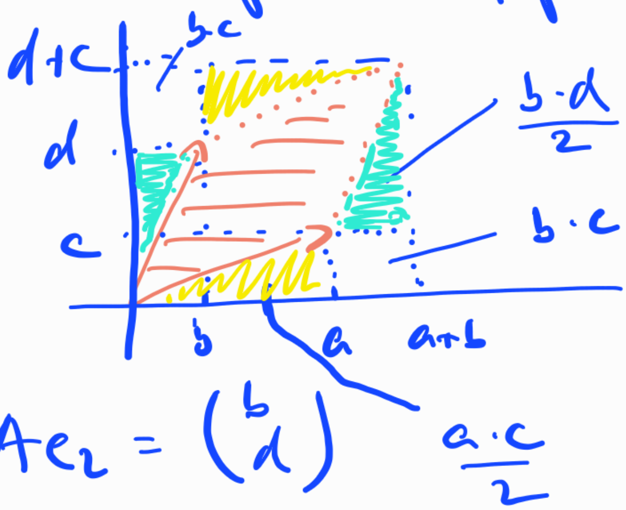
$e_2' = A e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_3' = A e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

DETERMINANTY

Motivace 1: Uvaž lineární zobrazení $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x)=Ax$.





$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A\cdot e_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ $\quad Ae_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

f udělá ze čtverce rovnoběžník.

Plocha rovnoběžníku:

$$(a+b)(c+d) - 2\cdot bc - ac - bd$$

$$= \cancel{ac} + bc + ad + \cancel{bd} - 2bc - \cancel{ac} - \cancel{bd}$$

$$= ad - bc$$

Původní plocha čtverce: 1 $\Rightarrow$ tj. plocha se změnila $(ad-bc)$-krát

---

Motivace 2: Uvaž soustavu $Ax=b$.

Zajímá nás, kdy má $!1$ řešení (tj. A je regulární)

i) Předp. $a \neq 0$

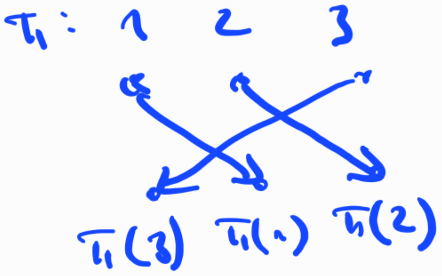
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$ (umíme Gauss. eliminaci – teď chceme formuli, nejen postup)

$\Rightarrow$ Je-li $ad-bc \neq 0$, pak $!1$ řešení!

ii) Pro $a=0$ potřebujeme $bc \neq 0$, tj. stejná podmínka

V obou případech jsme od matice A došli ke stejnému číslu, totiž $ad-bc$, závisející na jejích složkách, které cosi důležitého o A vyjadřuje.

Připomeňme:

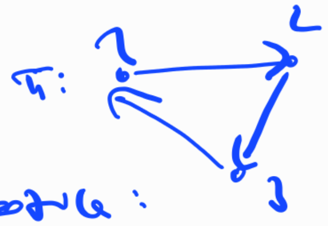


permutace $\{1,\dots,n\}$ je bijekce

$$\pi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$$

znaménko permutace

$$\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{\#\text{inverzí}} = (-1)^{n-\#\text{cyklů}}$$
$$= (-1)^{\#\text{transpozic}}$$



transpozice:

$$t_{ij}(k) = \begin{cases} i & k=j \\ j & k=i \\ k & k\neq i,j \end{cases}$$

Př: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $t_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

: $\pi = t_{12} \circ t_{23}$ $t_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2 inverze 1 cyklus 2 transpozice

$$\operatorname{sgn}(\pi) = -1^{2} = -1^{3-1} = -1^{2} = 1$$

Platí: i) $\operatorname{sgn}(p \circ q) = \operatorname{sgn}(p)\cdot \operatorname{sgn}(q)$,
ii) $\operatorname{sgn}(p^{-1}) = \operatorname{sgn}(p)$.

Značíme: S_n - množina všech permutací $\{1,\dots,n\}$

Všimněme si:

Pro $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, typu 2×2 $(n=2)$, jsme

došli k výrazu $a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$ neútočící věže na šachovnici

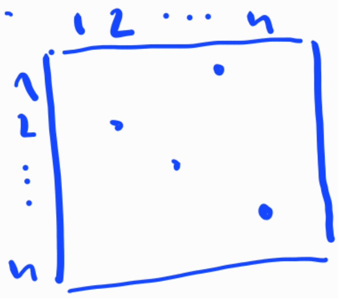
- sčítáme součiny typu $\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$
přes všechny permutace $\pi \in S_n$,
vhodně násobené ± 1, dle $\operatorname{sgn}(\pi)$

Definice: Determinant čtvercové matice $A \in T^{n\times n}$

je číslo $\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$.

- Pro trojúhelníkovou matici (dolní i horní) A platí: $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ – součin diagonál. prvků.

Tvrzení: $\det(A) = \det(A^T)$



$j = \pi(i) \iff \pi^{-1}(j) = i$

Důkaz: všimneme si že pro každou permutaci $\pi \in S_n$ platí:

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j),j}$$

Protože $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1})$, dostaneme

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{označme} \\ \pi' := \pi^{-1}}}{=} \sum_{\pi' \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi') \sum_{j=1}^{n} A^T_{j\pi'(j)} = \det(A^T) \quad \blacksquare$$

Věta:

i) Je-li $A = \underset{\text{matice}}{\begin{pmatrix} - v_1 - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix}} \in T^{n\times n}$, $\underset{\text{vektor}}{z^T \in T^n}$, $\underset{\text{skaláry}}{\alpha, \beta \in T}$,

pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\det \overbrace{\begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \alpha v_i + \beta z & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix}}^{=B} = \alpha \cdot \det(A) + \beta \cdot \det \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & z & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-tý řádek}$$

(tj. determinant je lineární funkcí každého svého řádku, a díky předešlému tvrzení i sloupce)

ii) Je-li A' matice vzniklá z A prohozením dvou řádků, pak $\det(A') = -\det(A)$.

iii) $\det(I) = 1$.

Důkaz: i) označíme a_{ij} j-tý prvek řádku i matice A

podle definice det je levá strana rovnosti rovna

$$\det(B) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdots\left(\alpha\, a_{i\pi(i)} + \beta\, z_{\pi(i)}\right)\cdots a_{n\pi(n)} =$$

$$= \alpha \underbrace{\left(\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}\right)}_{=\det(A)} + \beta \underbrace{\left(\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)}\cdots z_{\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}\right)}_{=\det\begin{pmatrix} - v_1 - \\ \vdots \\ - z - \\ \vdots \\ - v_n - \end{pmatrix}}$$

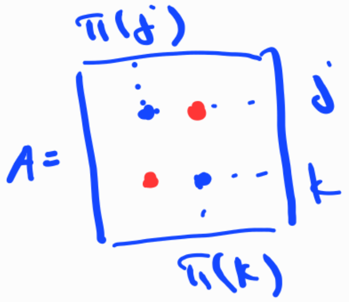
ii) Nechť $j \neq k$ jsou indexy prohozených řádků, t je transpozice $t(j)=k$, $t(k)=j$, $t(i)=i$ pro $i\neq j,k$,

Pak

z k-tého řádku A' beru $a'_{k\pi(k)} = a_{j\pi(k)}$

z j-tého — " — $a'_{j\pi(j)} = a_{k\pi(j)}$

$$\det(A') = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i(\pi\circ t)(i)}$$



$$= \sum_{(\pi\circ t)\in S_n} -\operatorname{sgn}(\pi\circ t) \prod_{i=1}^{n} a_{i(\pi\circ t)(i)}$$

$$= -\det(A)$$

iii) to už víme – I je zvláštní případ trojúhelníkové matice. ∎