Opak. PODPROSTORY URČENÉ MATICÍ LA1 $\boxed{27/11/2023}$

Def: K matici A typu $m\times n$ s prvky z tělesa T máme přiřazeny následující podprostory:

1. Sloupcový prostor A: $\mathcal{S}(A) = \mathcal{L}(\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\})$
2. Řádkový prostor A: $\mathcal{R}(A) = \mathcal{S}(A^T)$
3. Jádro matice A: $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in T^n : Ax = 0\}$
4. Jádro matice A^T: $\mathrm{Ker}(A^T) = \{y \in T^m : A^T y = 0\}$

Tvrzení: Násobení regulární maticí zleva nemění $\mathcal{R}(A)$ ani $\mathrm{Ker}(A)$.

Důkaz: Uvaž matici A typu $m\times n$ nad T, a regulární R, $m\times m$. Chceme: $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(RA)$

všimni si: každý řádek RA je LK řádků A.

$\Rightarrow$ lin. obal řádků RA $\subseteq$ lin. obal řádků A

tedy $\mathcal{R}(RA) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Dále: R^{-1} existuje a je regulární, proto

$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(R^{-1}\cdot(R\cdot A)) \subseteq \mathcal{R}(RA)$

Druhá část: Chceme: $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(RA)$

$x \in \mathrm{Ker}(A)$ znamená $Ax = 0$.
Pak též $R\cdot A x = R\cdot 0 = 0$, tedy $x \in \mathrm{Ker}(RA)$. $\subseteq$

Naopak
$x \in \mathrm{Ker}(RA)$ znamená $RAx = 0$ $\supseteq$
Pak i $Ax = R^{-1}RAx = R^{-1}0 = 0$. $\blacksquare$

Důsledek: Elementární ŘÚ nemění $\mathcal{R}(A)$ ani $\mathrm{Ker}(A)$.

Definice: Soubor vektorů (konečná posloupnost) B vektorového prostoru V se nazývá systém generátorů V, pokud $\mathcal{L}(B)=V$.

Lineárně nezávislý systém generátorů VP V se nazývá báze.

Existuje pro každý VP?

Př.: • $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$, $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (i-tá), řádky I_n

• $1, x, x^2, \ldots$ báze VP polynomů s reál. koef.

Tvrzení: Nechť V je VP a X je soubor vektorů z V t.ž.

i) $\mathcal{L}(X)=V$ "minimální SG je báze"

ii) $\forall v \in X$, $\mathcal{L}(X \setminus \{v\}) \neq V$.

Pak X je báze VP V.

Důkaz: Stačí ověřit, že X je LN.

vlastnost ii) implikuje: $\forall v \in X$, $v \notin \mathcal{L}(X \setminus \{v\})$,

což podle Tvrzení z minule znamená, že X je LN. ∎

Důsledek: Z každého konečného SG lze vybrat bázi.

Důkaz: Uvažme $X=(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ SG VP V.

Buď $\exists i$ t.ž. $\mathcal{L}(X \setminus \{v_i\}) = \mathcal{L}(X)$ – odebereme v_i

a máme menší SG – toto lze jen konečně-krát.

Nebo $\forall i$, $\mathcal{L}(X \setminus \{v_i\}) \neq \mathcal{L}(X)$ – máme bázi. ∎

Věta: Každý VP má bázi.

Důkaz pro konečně generované VP (= mající konečný systém gen.)

– dle předešlého Důsledku. ∎

Pro nekonečné nebude.

Kolik může být různých vektorů báze?

Lemma o výměně: Nechť $(v_1, \dots, v_n)$ je SG VP V, a $w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Pak pro každé i t.ž. $a_i \neq 0$, je $\underbrace{(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)}_{*}$ SG VP V.

Důkaz: Dle předpokladu,

$$v_i = a_i^{-1}\left(w - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} a_j v_j\right). \qquad (\#)$$

Chceme nahlédnout, že $(*)$ je SG, tj. potřebujeme ukázat, že $\forall z \in V$ lze vyjádřit jako LK vektorů $(*)$.

Uvaž libovolné $z \in V$. Protože $(v_1, \dots, v_n)$ je SG, pro vhodná a_i platí $z = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$.

Když v této LK nahradíme v_i LK vektorů $(*)$ podle vyjádření $(\#)$, dostaneme z jako LK vektorů $(*)$.

$\Rightarrow$ $(*)$ je SG. $\boxtimes$

Př.: $V = \mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) je SG V. Pro $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_1 + 3 e_2$ máme $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, tedy dle Lemma (w, e_2, e_3) a (e_1, w, e_3) jsou také SG $\mathbb{R}^3$.

Steinitzova věta o výměně: Je-li $N = (w_1, \dots, w_m)$ LN soubor vektorů VP V a $G = (v_1, \dots, v_n)$ je SG VP V, pak $m \le n$ a nějakých m vektorů z G lze nahradit vektory z N tž. dostaneme opět SG.
("libovolný LN soubor lze doplnit na SG").

Důkaz: Dokážeme indukcí.
pro $m = 0$ platí – nic nenahrazujeme.
indukční krok: $m-1 \to m$

Dle indukčního předp. lze $m-1$ vektorů z G nahradit vektory $w_1, \dots, w_{m-1}$ tž. máme stále SG
- označme ho G'

$$G' = (w_1, w_2, \dots, w_{m-1}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m+1}})$$

Protože N je LN, máme $\forall i, w_i \ne 0$
Protože G' je SG, lze w_m vyjádřit jako LK vektorů z G' tž aspoň jeden koef. $\ne 0$.

Navíc, protože vektory N jsou LN, musí být nenulový koeficient u aspoň jednoho vektoru z G (ozn. v_j).

Dle lemma o výměně bude $G \setminus \{v_j\} \cup \{w_m\}$ zase SG ∎

Důsledek: Každé dvě báze konečně generovaného VP mají stejný počet vektorů.

Důkaz: Uvaž báze $B = (b_1, \dots, b_m)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$. Protože

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } B \text{ je LN, } C \text{ je SG} \Rightarrow m \le n \\ \text{ii) } C \text{ je LN, } B \text{ je SG} \Rightarrow n \le m \end{array}\right\} \Rightarrow m = n$$ ∎

Definice: Dimenze VP V je mohutnost nějaké báze V.
Značíme: $\dim(V)$ Pozn. Dává smysl!