Opak.: VEKTOROVÉ PROSTORY   LA 1   20/11/2023

Definice: Vektorový prostor nad tělesem T je množina V s binární operací $+$ a operací $\cdot$ splňující následující axiomy: ($T \times V \to V$)

1. $(V,+)$ je Abelova grupa, neutrální prvek 0, inverzní prvek k $v \in V$ $-v$
2. $\forall a,b \in T, \forall v \in V, \quad a\cdot(b\cdot v) = (ab)\cdot v$
3. $\forall v \in V, \quad 1\cdot v = v$, kde 1… jednotkový prvek v T
4. $\forall a,b \in T, \forall v \in V, \quad (a+b)\cdot v = a\cdot v + b\cdot v$
5. $\forall a \in T, \forall u,v \in V, \quad a\cdot(u+v) = a\cdot u + a\cdot v$

neprázdná!

Def: Nechť $(V,+,\cdot)$ je VP nad T a nechť $\emptyset \neq U \subseteq V$ t.ž.:

i) $\forall u,v \in U: u+v \in U$
ii) $\forall a \in T, \forall u \in U: a\cdot u \in U$

} tj. U uzavřená na $+,\cdot$

Pak $(U,+,\cdot)$ je podprostor V.   též to je VP

Počítání – Pozorování: $\forall t \in T, \ t\cdot 0 = 0$. (už dvakrát minule)

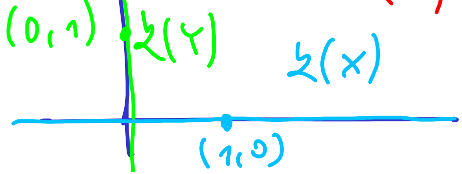
Def: Jsou-li $v_1,\dots,v_n \in V$ vektory VP nad T, pak každý výraz $a_1v_1 + \dots + a_nv_n$, kde $a_i \in T$, se nazývá lineární kombinace $v_1,\dots,v_n$. (vždy konečný počet vektorů)

LK prázdného systému vektorů definujeme jako nulový vektor.

Definice: Nechť V je VP nad T a X je podmnožina V. Pak lineární obal X je množina všech lineárních kombinací prvků X, tj. $\mathcal{L}(X) = \{t_1v_1 + \dots + t_kv_k : k \in \mathbb{N}_0, v_1,\dots,v_k \in V, t_1,\dots,t_k \in T\}$. (někdy se značí $\mathrm{span}(X)$)

Př. $V = \mathbb{R}^2$, $X = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$, $Y = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $Z = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\mathcal{L}(Z) = \mathbb{R}^2$



Věta: Pro libovolný VP V nad T a libovolnou $X \subseteq V$ je lineární obal X podprostorem V.

Důkaz: • protože 0 je LK prázdného systému vektorů, pro každé $X \subseteq V$ máme $0 \in \mathcal{L}(X)$, tedy $\mathcal{L}(X) \neq \emptyset$. neprázdnost

• každá LK vektorů z V jistě patří do V, tedy $\mathcal{L}(X) \subseteq V$

• uzavřenost $\mathcal{L}(X)$ na sčítání

uvaž LK $a_1v_1 + \dots + a_kv_k$ vektorů $v_1, \dots, v_k \in V$ s koeficienty $a_1, \dots, a_k \in T$,

LK $b_1u_1 + \dots + b_\ell u_\ell$ vektorů $u_1, \dots, u_\ell \in V$ s koeficienty $b_1, \dots, b_\ell \in T$,

a jejich součet $a_1v_1 + \dots + a_kv_k + b_1u_1 + \dots + b_\ell u_\ell$ - jde

o LK vektorů $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_\ell$ s koeficienty $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell \in T$

$\Rightarrow \in \mathcal{L}(X)$

• uzavřenost $\mathcal{L}(X)$ na násobení skalárem z T:

uvaž libovolnou LK $a_1u_1 + \dots + a_ku_k$ vektorů $u_1, \dots, u_k \in X$

s koeficienty $a_1, \dots, a_k$, a $r \in T$.

Pak $r \cdot (a_1u_1 + \dots + a_ku_k) \overset{\text{distr.}}{=} (r \cdot a_1)u_1 + \dots + (ra_k)u_k$, tedy jde

o LK vektorů $u_1, \dots, u_k$ s koeficienty $ra_1, \dots, ra_k \in T \Rightarrow \in \mathcal{L}(X)$ ∎

Tvrzení: Nechť U_i, $i \in I$, jsou podprostory VP V nad T.

Pak $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ je také podprostor V.

Důkaz: protože $0 \in U_i$, $\forall i \in I$, máme $0 \in U$, tj. $U \neq \emptyset$ neprázdná

• $U \subseteq V$ je zřejmé (každé $U_i \subseteq V$)

• uzavřenost na sčítání:

uvaž $u, v \in U$. Jistě $\forall i \in I, u, v \in U_i \overset{U_i \text{ je podprostor}}{\Longrightarrow} \forall i \in I, u+v \in U_i$

$\Rightarrow u + v \in U$

• uzavřenost na násobení obdobně: $u \in U, a \in T$.

$\forall i \in I$, $a \cdot u \in U_i \Rightarrow a \cdot u \in U$

Tvrzení: Nechť V je vektorový prostor nad T a $X \subseteq V$. Pak $\mathcal{L}(X)$ je průnik všech podprostorů V, které obsahují X.

Pozn. popis zvenku vs. popis zevnitř (def.)

Důkaz: Označme W průnik všech podprostorů V, které obsahují X. Chceme ukázat dvě inkluze: $\mathcal{L}(X) \subseteq W$ a $W \subseteq \mathcal{L}(X)$.

i) Víme, že • W je podprostor (minulé tvrzení)

• $X \subseteq W$

$\Rightarrow$ dle def. podprostoru (uzavřenost...) $\Rightarrow \mathcal{L}(X) \subseteq W$.

ii) Víme, že • $\mathcal{L}(X)$ je podprostor V (dle minulé věty)

• $\mathcal{L}(X)$ obsahuje X

$\Rightarrow \mathcal{L}(X)$ je jedním z podprostorů, jejichž průnik je W, tedy $W \subseteq \mathcal{L}(X)$. $\blacksquare$

Def: Soubor (konečná posloupnost) vektorů $v_1, \dots, v_n$ je lineárně nezávislý, pokud z rovnosti $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ plyne $a_1 = \dots = a_n = 0$. V opačném případě je lineárně závislý.

Poznámky: • LN – pouze triviální LK získá nulový vektor

• pokud $v_i = v_j$ pro $i \neq j$, $\Rightarrow$ LZ

• pokud $v_i = 0$ pro nějaké i $\Rightarrow$ LZ

Pozorování: Jsou-li $v_1, \dots, v_n$ LZ, pak $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ a koeficienty $b_j \in T$, $j \neq i$, t.ž. $v_i = \sum_{j \neq i} b_j v_j$.

Důkaz: Máme $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = 0$ a $\exists i$ t.ž. $a_i \neq 0$

Rovnost přepíšeme: $a_i v_i = -\sum_{j \neq i} a_j v_j \quad / \cdot (a_i^{-1})$

Pozn. platí i naopak. $\quad v_i = \sum_{j \neq i} \frac{-a_j}{a_i} v_j$ $\blacksquare$

Tvrzení: Soubor $v_1, \dots, v_n$ je LN $\Leftrightarrow \forall i$, $v_i \notin \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\})$.

PODPROSTORY URČENÉ MATICÍ

Def: K matici A typu $m \times n$ s prvky z tělesa T máme přiřazeny následující podprostory:

1. Sloupcový prostor A: $\mathcal{S}(A) = \mathcal{L}(\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\})$
2. Řádkový prostor A: $\mathcal{R}(A) = \mathcal{S}(A^T)$
3. Jádro matice A: $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in T^n : Ax = 0\}$
4. Jádro matice A^T: $\mathrm{Ker}(A^T) = \{y \in T^m : A^T y = 0\}$

Pozn: už jsme si všimli minule, že $\mathrm{Ker}(A)$ je podprostor.

Elementární ŘÚ nemění $\mathcal{R}(A)$ ani $\mathrm{Ker}(A)$.

Tvrzení: Násobení regulární maticí zleva nemění $\mathcal{R}(A)$ ani $\mathrm{Ker}(A)$.

Důkaz: Mějme matici A typu $m \times n$ nad T, a regulární R, $m \times m$.

všimni si: každý řádek RA je LK řádků A.

$\Rightarrow$ lin. obal řádků $RA \subseteq$ lin. obal řádků A

tedy $\mathcal{R}(RA) \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Dále: R^{-1} existuje a je regulární, proto

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(R^{-1} \cdot (R \cdot A)) \subseteq \mathcal{R}(RA)$$

Druhá část:

$x \in \mathrm{Ker}(A)$ znamená $Ax = 0$.

Pak též $R \cdot A x = R \cdot 0 = 0$, tedy $x \in \mathrm{Ker}(RA)$. $\subseteq$

Naopak

$x \in \mathrm{Ker}(RA)$ znamená $RAx = 0$ $\supseteq$

Pak: $Ax = R^{-1}RAx = R^{-1}0 = 0$. $\blacksquare$