TELESA – dopolnil:

Def: Red: obstaja n t.j. $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{-krat}}=0$, pa najmanjši takšen n nazivamo **karakteristika telesa**;
v nasprotnem primeru je karakteristika nič.

Veta: Karakteristika telesa je bodisi 0 ali praštevilo.

Dokaz: predp. karakteristika je $n = a\cdot b$, $a,b>1$

Pol
$$0 = 1\cdot \overbrace{\underbrace{1+1+\cdots+1}_{a\text{-krat}} + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{a\text{-krat}} + \cdots + \underbrace{1+1+\cdots+1}_{a\text{-krat}}}^{n\text{-krat}}$$
(skupaj b-krat)
$$= (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{a\text{-krat}})(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{b\text{-krat}}) = a\cdot b \quad \text{– spor}$$

distributivnost pomnožimo oklepaje — produkt nenul je nula $\boxtimes$

Veta: Telesa s n prvki obstaja prav kadar $n\geq 2$ je moč praštevila.

brez dokaza.

VEKTOROVÉ PRIESTORY

Reálne čísla $\xrightarrow{\text{vlastnosti}}$ Telesá n-tice čísel $\rightsquigarrow$ Vekt. priestor

Pr. Vzpomenieme na homogénnu sústavu (30/10/23)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\check{R} = \left\{ p_1 \overset{u}{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + p_2 \overset{v}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}} : p_1, p_2 \in \mathbb{R} \right\} = \{ p_1 \cdot u + p_2 \cdot v : p_1, p_2 \in \mathbb{R} \}$$

Všimnime si:

- každý násobok (násobenie číslom) u patrí do $\check{R}$
- —— " —— v —— " ——
- súčet (vektorov) u a v —— " ——

hlbšia štruktúra

$\Rightarrow$ (• súčet ľubovoľ. násobkov u a v patrí do $\check{R}$)

Definícia: Vektorový priestor nad telesom T je množina V (prvky – vektory) s binárnou operáciou $+$ (sčítanie vektorov) a operáciou $\cdot$ (násobenie vektora $v \in V$ skalárom a z T; kde $\cdot$ zobrazenie $T \times V \to V$) spĺňajúci nasledujúce axiómy: [pozor: odlíšiť sčítanie v V a v T, podobne s násobením]

1. $(V, +)$ je Abelova grupa, neutrálny prvok značíme 0, inverzný prvok k $v \in V$ značíme $-v$
   [pozor: dva neutrálne prvky – $0 \in T$, $0 \in V$]
2. $\forall a, b \in T$, $\forall v \in V$, $a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$ násobenie vektora skalárom je asociatívne
3. $\forall v \in V$, $1 \cdot v = v$, kde 1… jednotkový prvok v T
4. $\forall a, b \in T$, $\forall v \in V$, $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
5. $\forall a \in T$, $\forall u, v \in V$, $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ distributivita

Terminologie: prvky V ... vektory (všimnout si: nemusí to být n-tice)
prvky T ... skaláry

Příklady:

- pro libovolné T, $V = \{0\}$ ... triviální VP
- pro libovolné T a $n \in \mathbb{N}$, $V = T^n$ ... tzv. aritmetický VP dimenze n nad T

  vektory ... n-tice z T např. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

  $+$ ... po složkách (součet v T)

  $\cdot$ ... každou složku násobíme (součin v T)
- pro libovolné T, a $m, n \in \mathbb{N}$, V – množina všech matic $m \times n$ s prvky z T ~ vektory v $T^{m \cdot n}$
- množina všech polynomů s reálnými koeficienty

  značíme $\mathbb{R}[x]$ .... sčítání po složkách
- množina všech funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $((f+g)(x) = f(x) + g(x), \ldots)$
- podobně ... všech spojitých fcí

  diferencovatelných fcí
- ... všech polynomů stupně ≤ 13, apod.
- množina všech podmnožin množiny X nad $\mathbb{Z}_2$:

  $\forall A, B \subseteq X$, $A + B = A \cup B \setminus (A \cap B)$ symetrická diference množin

  $0 \cdot A = \emptyset$, $1 \cdot A = A$
- libovolná přímka procházející počátkem v $\mathbb{R}^2$,

  např. $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ pro $(a,b) \neq (0,0)$

Tvrzení (základní vlastnosti)

- Prvek $0 \in V$ určen jednoznačně.
- $\forall u \in V$, $0 \cdot u = 0$ ($0 \in T$, $0 \in V$)
- $\forall u \in V$, $(-1) \cdot u = -u$ (inverzní k 1 v T; inverzní k u v V)
- $a \cdot u = 0 \iff a = 0 \in T$ nebo $u = 0 \in V$.

Dk. obdobný jako u těles.

ukázka: postup „sporem": předp. $a \cdot u = 0$ & $a \neq 0$ & $u \neq 0$.

Pak $\boxed{u = 1 \cdot u} = (a^{-1} a) \cdot u = a^{-1} \cdot (a \cdot u) = a^{-1} \cdot 0 =$

$= a^{-1}(u + (-u)) = a^{-1} \cdot u + \underbrace{a^{-1} \cdot (-1) \cdot u}_{=(-1)(a^{-1} \cdot u)} = a^{-1} u - a^{-1} u = 0$ spor.

Def: Nechť $(V, +, \cdot)$ je VP nad T a nechť $\emptyset \neq U \subseteq V$ (tj. neprázdná)

tž. i) $\forall u, v \in U$: $u + v \in U$

ii) $\forall a \in T$, $\forall u \in U$: $a \cdot u \in U$

} tj. U uzavřená na $+, \cdot$

Pak $(U, +, \cdot)$ je podprostor V (kde $+, \cdot$ značí zděděné operace z V)

Uvědomit si: ☺ je to také VP – všechny ax. splněny – (uzavřenost, neutrální, inverzní, distr.) – rozmyslet si

Př. Pro $V = \mathbb{R}^2$: podprostory: celé $\mathbb{R}^2$

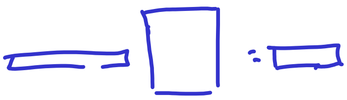
počátek $(0,0) \in \mathbb{R}$

každá přímka počátkem

Df: Jsou-li $v_1, \dots, v_n \in V$ vektory VP nad T, pak každý výraz $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, kde $a_i \in T$, se nazývá <u>lineární kombinace</u> $v_1, \dots, v_n$. (vždy <u>konečný</u> počet vektorů).

LK <u>prázdného systému</u> vektorů definujeme jako nulový vektor.

<u>Pozn.</u>
- $Ax = b$ má řešení $\iff$ b je LK sloupců A.
- elementární řádkové úpravy – nahrazení řádku lineární kombinací řádků
- $u^T \cdot B = v$ – v je lineární kombinace řádků B, u popisuje, o jakou LK jde



- podobně $B \cdot w$ … LK sloupců B
- $A \cdot B = C$ – každý řádek C je LK řádků B, (řádky A popisují, jakou), a každý sloupec C je LK sloupců A
- singulární matice A – existuje netriviální kombinace řádků A rovná nulovému vektoru
- <u>Řešení $Ax = 0$</u>: $R = \{ \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \mid a_i \in T \}$ …. LK $u_1, \dots, u_k$