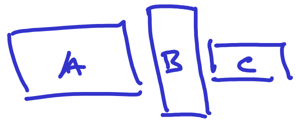
Počítání s maticemi

LA1 30/10/2023

Násobení – dokončení důkazu tvrzení z minulého týdne

Tvrzení: Pro matice A, B, C platí:

a) $(AB)C = A(BC)$ asociativita



Důkaz a): $A \dots m\times n$, $B \dots n\times p$, $C \dots p\times q$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k}\Big) c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{p} b_{\ell k} c_{kj}\Big)}_{(BC)_{\ell j}} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} (BC)_{\ell j} = (A(BC))_{ij}$$

∎

b, c, d, e – podobně – DÚ.

Připomeňme si: • B, $n\times n$ je inverzní k A, když $AB = I$

• A je regulární, když $\operatorname{rank}(A) = n$
$n\times n$ • singulární

Věta: Matice A, $n\times n$, má inverzní matici, právě když je regulární. V takovém případě je A^{-1} určena jednoznačně a platí též $A^{-1}A = I$.

Důkaz: $\Rightarrow$ Víme: $\exists A^{-1}$ tž. $AA^{-1} = I$

Chceme: $\operatorname{rank}(A) = n$

Sporem: předp. $\operatorname{rank}(A) < n$.

Nechť $(A' \mid B)$ je odstupňovaný tvar $(A \mid I)$.

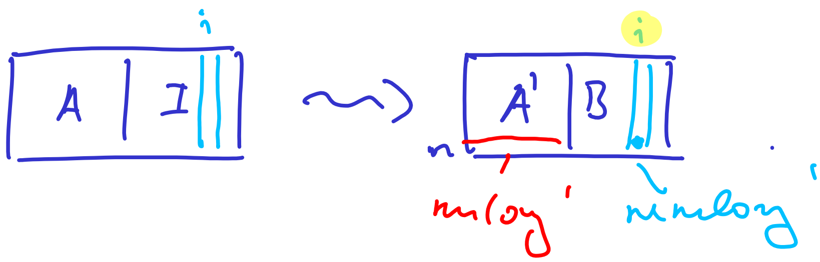
Pak poslední řádek v A' je nulový

v B není nulový – (ERÚ nemění hodnost)

tj. $\exists$ index i tž $(B)_{ni} \neq 0$ – nenulový prvek

$\Rightarrow Ax = e_i$ nemá řešení

ALE protože $\exists A^{-1}$: $Ax = e_i$ má řešení } spor.



⇐ Víme (Věta předminule):

je-li $\operatorname{rank}(A) = n$, pak pro každé $b \in \mathbb{R}^n$ má $Ax = b$ právě jedno řešení.

Tedy pro každé $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - i-tá složka, má $Ax = e_i$ řešení - označme z^i

Uvažme součin

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ z^1 & z^2 & \cdots & z^n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{=Z} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = I$$

⇒ máme inverzní matici; umíme jednostrannou.

$A^{-1}A = I$? . Uvažme libovolné řešení x soustavy $A^{-1}x = 0$.

Pak $x = Ix = AA^{-1}x = A0 = 0 \Rightarrow A^{-1}x = 0$ má !1 řešení

⇒ A^{-1} je regulární ⇒ A^{-1} má inverzní matici.

$$(A^{-1})^{-1} = I(A^{-1})^{-1} = (AA^{-1})(A^{-1})^{-1} = AI = A \quad \blacksquare$$

tedy $A^{-1}A = A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I$

Důsledek: Pro regulární matice A, B je i AB regulární.

Důkaz: AB má inverzní matici: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. $\blacksquare$

ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ OPERACE POMOCÍ MATICOVÉHO NÁSOBENÍ

Pozorování: Nechť B je matice vzniklá z A

a) vynásobením i-tého řádku číslem t. Pak $B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & t & \\ 0 & & & \ddots\ 1 \end{pmatrix} A$.

$e_{ii} = t$, $e_{jj} = 1$, $j \neq i$, $e_{kl} = 0$ $k \neq l$

b) přičtením j-tého řádku k i-tému. Pak $B = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & \\ \cdots & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} A$.

$e_{ll} = 1$, $e_{ij} = 1$, jinak $= 0$

Důsledek: Je-li B matice vzniklá z A posloupností ř.ř. úprav, pak existuje regulární čtvercová matice C t.ž. $B = CA$.

Dk. $B = E_k \cdots E_2 E_1 A$ $\qquad C = E_k \cdots E_2 E_1$

Věta (Řešení soustavy):

Nechť A je matice $m \times n$ hodnosti $r \leq n$, a nechť $\acute{R}$ je množina všech řešení soustavy $Ax=b$.

Pokud $\acute{R} \neq \emptyset$, pak existují řešení $u_1, \dots, u_{n-r}$ soustavy $Ax=0$ a řešení z soustavy $Ax=b$ takové, že množina všech řešení $Ax=b$ lze vyjádřit jako

$$\acute{R} = \{ z + p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_{n-r} u_{n-r} : p_1, \dots, p_{n-r} \in \mathbb{R} \}.$$

Př.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 &= 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad\quad b \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \end{array} \rightsquigarrow \dots \text{Dú}$$

báze

$$\begin{array}{c} \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \uparrow \qquad\quad \uparrow \qquad \\ \text{volné} \qquad A' \qquad\quad b' \end{array}$$

$$\text{tj.} \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad\quad + x_4 &= -2 \\ x_3 + \tfrac{1}{3}x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$\uparrow$ volné $\uparrow$

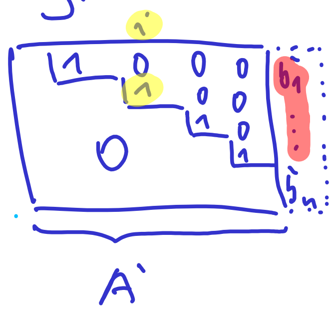
$$\Rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} x_1 & = & -2 & -3p_1 & -1p_2 \\ x_2 & = & & 1p_1 & \\ x_3 & = & 1 & & -\tfrac{1}{3}p_2 \\ x_4 & = & & & 1p_2 \\ x & & z & u_1 & u_2 \end{array}$$

$$x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Důkaz – náznak:

Označme $(A'|b')$ redukovaný odstupňovaný tvar $(A|b)$ a uvažme soustavu $A'x = b'$.

Označme J – indexy volných proměnných.



Vidíme: každá bázická proměnná x_i lze jednoznačně vyjádřit jako b_i plus součet vhodných násobků volných proměnných: $x_i = b_i + \sum_{j \in J} u_{ij} x_j$

parametry

Grupy – připomenout: Dvojice $(G,\square)$, kde G je množina a $\square$ je binární operace splňující:

1. $\forall a,b,c \in G: (a \square b) \square c = a \square (b \square c)$ asoc.
2. $\exists e \in G\ \forall a \in G: a \square e = e \square a = a$ neutr.
3. $\forall a \in G\ \exists b \in G: a \square b = b \square a = e$ inverz.

(příklad – otočení $\mathbb{R}^3$ kolem přímky procházející počátkem)

Abelova grupa: navíc 4. $\forall a,b \in G: a \square b = b \square a$ kom.

Defin: **Těleso** je množina T spolu s dvěmi binárními operacemi $+$ (sčítání) a $\bullet$ (násobení), splňující následující podmínky (tzv. axiomy):

1) $(T,+)$ je Abelova grupa s neutrálním prvkem 0, inverzní prvek k a značíme $-a$

2) $(T \setminus \{0\}, \bullet)$ je Abelova grupa s neutrálním prvkem 1, inverzní prvek k a značíme a^{-1}

3) $\forall a,b,c \in T: a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivita)

Příklady: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ s obvyklým $+, \bullet$

Netělesa: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$T = \{0,1\}$.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

•	0	1
0	0	0
1	0	1

← nejmenší těleso (ověřte si)

Pozn. 1: Dvě úrovně abstrakce:

počítání s čísly → počítání s písmeny, která reprezentují čísla (eliminace)

→ počítání s písmeny, která reprezentují "cokoli" (tělesa)

2: axiomy – rozhraní

3: Vše o maticích a soustavách platí pro libovolné těleso

Tvrzení 1: 1. Prvky $0, 1$ jsou určeny jednoznačně.

2. $\forall a \in T$, prvky $-a, a^{-1}$ jsou určeny jednoznačně.

Důkaz: platí už pro grupy.

1. Předp. $0, \bar{0}$: $0 = 0 + \bar{0} = \bar{0}$.

2. $-a = -a + 0 = -a + (a + \overline{-a}) = (-a + a) + \overline{-a} = \overline{-a}$

pro a^{-1} stejné $\blacksquare$

Tvrzení 2: 1. $\forall a \in T$, $0 \cdot a = 0$

2. $\forall a \in T$, $(-1) \cdot a = -a$

3. Pokud $a \cdot b = 0$, pak $a = 0$ nebo $b = 0$.

Důkaz: 1. $0 \cdot a = 0 \cdot a + (0 \cdot a - 0 \cdot a) = (0 \cdot a + 0 \cdot a) - 0 \cdot a =$

$= (0 + 0) \cdot a - 0 \cdot a = 0 \cdot a - 0 \cdot a = 0$

2. $(-1) \cdot a + a = (-1 + 1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$, tj. $(-1)a$ má vlastnost inverzního prvku k a; díky jednoznačnosti (viz Tvrzení 1) musí být $(-1) \cdot a = -a$.

3. Sporem: předp. $a \neq 0, b \neq 0$. Pak $\exists a^{-1}, b^{-1}$:

$$\underline{1} = 1 \cdot 1 = (a \cdot a^{-1}) \cdot (b \cdot b^{-1}) = \underbrace{(a \cdot b)}_{=0} \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = 0 \cdot (a^{-1} b^{-1}) = \underline{0}$$

Spor. $\blacksquare$