LA1 23/10/2023

POČÍTÁNÍ S MATICEMI

Minule
- hlavní diagonála
- diagonální matice
- jednotková matice
- nulová matice
- součet matic
- k-násobek matice

Značení: pro matici A budeme $(A)_{ij}$ značit prvek na řádku i ve sloupci j

Def: • Transponovaná matice k matici A typu $m \times n$ je matice A^T typu $n \times m$ tž. $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$, $\forall i,j$

Tvrzení: Pro matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a čísla $s,t \in \mathbb{R}$ platí:

1) $A + B = B + A$ komutativita
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$ asociativita
3) $A + 0 = A$
4) $A + (-A) = 0$, kde $-A = (-1)A$
5) $s(tA) = (st)A$
6) $s(A+B) = sA + sB$
7) $(s+t)A = sA + tA$

(6) a 7)) distributivita

Důkaz: 1) uvažme libovolnou pozici i - řádek, j - sloupec

$$(A+B)_{ij} \underset{\substack{\text{definice sčítání}\\ \text{matic}}}{=} a_{ij} + b_{ij} \underset{\substack{\text{komutativita}\\ \text{sčítání v } \mathbb{R}}}{=} b_{ij} + a_{ij} \underset{\substack{\text{def. sčítání}\\ \text{matic}}}{=} (B+A)_{ij}$$

ostatní podobně – DÚ.

GRUPY

Př. při opětovné substituci narazíme napřiklad na

$$x + 3 = 5 \quad ?$$

Jak to řešíme - ve smyslu jaké vlastnosti čísel a sčítání potřebujeme?

1. přičteme -3 na obě strany ($=$ odečteme 3)

$$(x+3) + (-3) = 5 + (-3)$$

2. přezávorkujeme (asociativita $+$) a vypočteme

$$x + \underbrace{(3 + (-3))}_{} = 2$$

3. sečteme $= 0$

$$\underbrace{x + 0}_{} = 2$$

4. sečteme

$$x = 2$$

Definice: Binární operace na množině T je zobrazení z $T \times T$ do T.

Konvence: pro binární operaci $\oplus : T \times T \to T$ a $a, b \in T$ píšeme $a \oplus b$ místo $\oplus(a,b)$

Př. $+, \cdot$ je binární operace na $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

$-$ —————— " —— $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$, $\cancel{\mathbb{N}}$

$:$ —————— " —— $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Také: $+$ na množině všech reálných $m \times n$ matic

Def: **Grupa** je dvojice $(G, \oplus)$, kde G je množina a $\oplus$ je binární operace na G, splňující následující axiomy:

1. $\forall a, b, c \in G: (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ **asociativita**
2. $\exists e \in G\ \forall a \in G: a \oplus e = e \oplus a = a$ **neutrální prvek**
3. $\forall a \in G\ \exists b \in G: a \oplus b = b \oplus a = e$

   ↑ **inverzní prvek k a**

Pokud navíc platí:

4. $\forall a, b \in G: a \oplus b = b \oplus a$, **komutativita**

je G **Abelova** (komutativní) **grupa**

Příklady: • $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ ~~$(\mathbb{N}, +)$~~ ~~$(\mathbb{Z}, -)$~~

• $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ ... grupa reálných $m \times n$ matic

• $G = \{0, 1\}$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

← binární grupa

• $G = \underbrace{\{0, 1, \ldots, n-1\}}_{\mathbb{Z}_n}$, operace $\oplus$ definovaná:

$a \oplus b = a + b \bmod n$

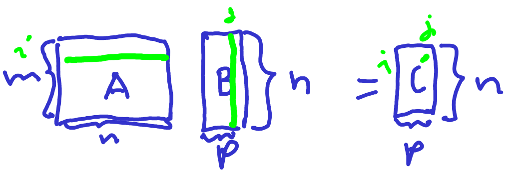
• $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

• $(\{e\}, \circ)$ - nejmenší grupa

všechny jsou Abelovy grupy

Zpět k počítání s maticemi.

• Je-li A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$, pak **součin matic** A, B, ozn. AB, je matice C typu $m \times p$ tž. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = (A_{i-})(B_{-j})$



Tvrzení: Pro matice A, B, C platí:

a) $(AB)C = A(BC)$ asociativita

b) $A(B+C) = AB + AC$ distributivita zleva

c) $(A+B)C = AC + BC$ —"— zprava

d) $(AB)^T = B^T C^T$

e) $AI_n = I_m A = A$ pro $A \dots m \times n$

Pozor: není komutativní!

za předpokladu, že všechny součty a součiny matic v příslušné rovnosti jsou definovány.

Důkaz a): $A \dots m \times n$, $B \dots n \times p$, $C \dots p \times q$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{p} b_{\ell k} c_{kj} \right)}_{(BC)_{\ell j}} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} (BC)_{\ell j} = (A(BC))_{ij}$$

∎

b, c, d, e – podobně – DÚ.

Definice • Řekneme, že matice B je inverzní k matici A typu $n \times n$, pokud $AB = I_n$. Pokud inverzní matice k A existuje, značíme ji A^{-1}.

• Čtvercová matice A, $n \times n$, je **regulární**, pokud $\operatorname{rank}(A) = n$; ($\Leftrightarrow Ax = 0$ má pouze řešení 0) jinak je **singulární**.

Věta: Matice A, $n \times n$, má inverzní matici, právě když je regulární. V takovém případě je A^{-1} určena jednoznačně a platí též $A^{-1}A = I$.

Všimněme si: označ G_n všechny regulární $n \times n$ matice. Pak G_n s maticovým násobením je grupa.

Není Abelova – rozmyslet si. DÚ.