Dokončíme důkaz části b) věty: LA 1 16/10/2023

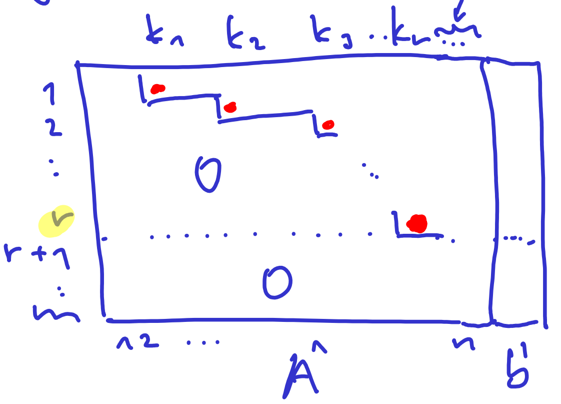
b) pokud alespoň jeden sloupec A' neobsahuje žádného pivota, má $Ax=b$ nekonečně mnoho řešení. Navíc platí, že pro každé nastavení volných (=nebázických) proměnných je nastavení bázických jednoznačně určeno.

Důkaz: Označme r počet pivotů A', a $k_1, k_2, \dots, k_r$ indexy bázických sloupců.

indukcí podle $i = r, r-1, \dots, 2, 1$ dokážeme:

pro libovolné hodnoty volných proměnných s indexem $> k_i$ jsou hodnoty bázických proměnných $k_i, \dots, k_r$ jednoznačně dány, pokud splňují rovnice.

• $i=r$: r-tá rovnice říká:



$$\underbrace{\underset{\text{pivot}}{a'_{rk_r}}^{\neq 0} \cdot x_{k_r} + \sum_{j=k_r+1}^{n} a'_{rj} \cdot x_j = b'_r}$$

↑ samé volné proměnné

x_{k_r} je jednoznačně dáno pro libovolnou volbu $x_{k_r+1}, x_{k_r+2}, \dots, x_n$

• indukční krok: $i+1 \to i$

i-tá rovnice

$$\underbrace{\underset{\text{pivot}}{a'_{ik_i}}^{\neq 0} \cdot x_{k_i} + \sum_{j=k_i+1}^{n} a'_{ij} \cdot x_j = b'_i}$$

← podle indukčního předpokladu, všechny bázické proměnné v Σ má již jednoznačně určeny

x_{k_i} jednoznačně určeno

výpočet bázických x_i odzadu – ZPĚTNÁ SUBSTITUCE

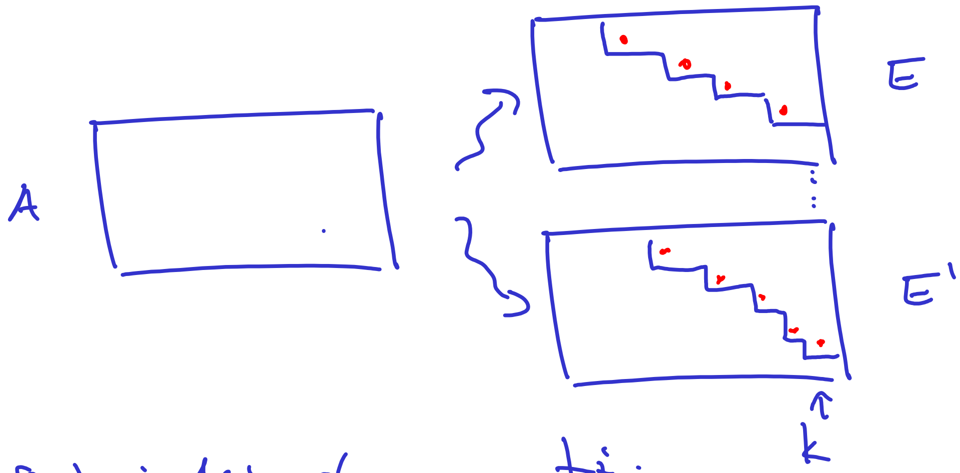
Důsledek (jednoznačnost pozic pivotů)

Je-li A libovolná matice a E matice v odstupňovaném tvaru vzniklá z A posloupností EŘÚ, pak místa pro pivoty v E jsou určena jednoznačně.

Důkaz: Sporem.

Předpokládejme, že existují matice A, E, E' t.ž.

- E a E' jsou získané z A pomocí EŘÚ, a
- E a E' jsou obě v odstupňovaném tvaru, a
- pozice pivotů v E a E' se liší.



Nechť k je největší index sloupce t.ž.

- k je bázický v jedné matici (bázický E')
- k je nebázický ve druhé (E)
- pro každé $j > k$ je typ sloupce j stejný v E a E'

Uvažme soustavu $Ax = 0$.

Víme, že má stejná řešení jako $Ex = 0$ a $E'x = 0$.

Pak dle předchozí věty

pro $Ex = 0$ lze hodnotu proměnné x_k nastavit libovolně (a doplnit na řešení)

pro $E'x = 0$ je hodnota x_k určena jednoznačně

– spor – množiny řešení

∎

<u>Definice</u>: Hodnost matice A, značená $\operatorname{rank}(A)$, je počet pivotů v libovolné matici v odstup. tvaru získané z A pomocí EŘÚ.

Poznámka: díky předchozí větě smysluplná definice.

- rozlišit případy předchozí věty podle $\operatorname{rank}(A)$ vs. $\operatorname{rank}(A|b)$

1) $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(A|b)$ – žádné řešení
2) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$ – aspoň jedno řešení
   a) $\operatorname{rank}(A) = n$ (= počet sloupců) – právě jedno řešení, žádné volné proměnné
   b) $\operatorname{rank}(A) < n$ – nekonečně mnoho řešení, aspoň jedna volná prom.

<u>Definice</u>: Homogenní soustava $Ax = 0$.

Buď <u>x_0 fixní řešení</u> soustavy $Ax = b$.

Pro každé řešení x' homogenní soustavy $Ax = 0$ je $(x_0 + x')$ řešením $Ax = b$.

Dk. $A(x_0 + x') = Ax_0 + Ax' = b + 0 = b$. □

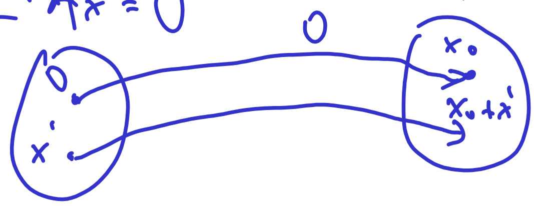
Pro každé řešení $\bar{x}$ soustavy $Ax = b$ je $(x_0 - \bar{x})$ řešením $Ax = 0$.

Dk. $A(x_0 - \bar{x}) = Ax_0 - A\bar{x} = b - b = 0$. □

SMYSL obou pozorování:

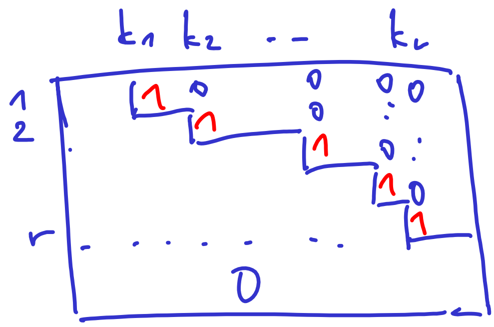
Zobrazení $g(x) = x + x_0$ je bijekce mezi řešeními $Ax = 0$ a $Ax = b$

řešení $Ax = 0$ řešení $Ax = b$



Definice: Matice C velikosti $m \times n$ je v **redukovaném odstupňovaném tvaru**, pokud je v odstupňovaném tvaru, a navíc

- každý pivot je 1 (tj. $C_{i,k_i} = 1 \ \forall i$)
- pro každé $i = 1, \dots, r$, i-tý bázický sloupec má 1 v řádku i a jinde 0



Gauss-Jordanova eliminace

převede matici do redukovaného odstupňovaného tvaru.

postup: 1. fáze – do odstupň. tvaru Gaussovou el.

2. fáze – pro $i = 1, \dots, r$ postupně nulujeme bázické sloupce k_i

Detaily – rozmyslet si.

Výhoda: řešení je rovnou vidět pro $(C|b)$ v redukovaném odst. tv.

i-tá rovnice: $$x_{k_i} + \sum_{\substack{j > k_i \\ j \text{ volné}}} c_{ij} x_j = b_i$$

POČÍTÁNÍ S MATICEMI

Def: • hlavní diagonála čtvercové matice A

- prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

• diagonální matice – čtvercová matice s nenulovými prvky pouze na hlavní diagonále

• jednotková matice řádu n – diagonální matice, všechny prvky na diagonále jsou 1

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

• nulová matice řádu n – 0

samé nuly

• součet matic A a B stejného typu $m \times n$ je matice C typu $m \times n$ t.ž. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i,j$

• k-násobek matice A je matice $D = kA$ stejného typu t.ž. $d_{ij} = k \cdot a_{ij}, \forall i,j$

Tvrzení: Pro matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a čísla $s, t \in \mathbb{R}$ platí:

1) $A + B = B + A$ komutativita
2) $(A+B)+C = A + (B+C)$ asociativita
3) $A + O = A$
4) $A + (-A) = O$, kde $-A := (-1)A$
5) $s(tA) = (st)A$
6) $s(A+B) = sA + sB$
7) $(s+t)A = sA + tA$

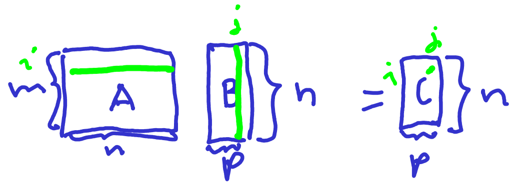
$\left.\begin{matrix} 6) \\ 7) \end{matrix}\right\}$ distributivita

Důkaz – DÚ

Značení: pro matici A budeme $(A)_{ij}$ značit prvek na řádku i ve sloupci j

Def.: • <u>Transponovaná matice k matici A</u> typu $m \times n$ je matice A^T typu $n \times m$ t.ž. $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$, $\forall i,j$

• Je-li A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$, pak součin matic A, B, ozn. AB, je matice C typu $m \times p$ t.ž. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = (A_{i,-})(B_{-,j})$



Tvrzení: Pro matice A, B, C platí:

a) $(AB)C = A(BC)$ asociativita

b) $A(B+C) = AB + AC$ distributivita zleva

c) $(A+B)C = AC + BC$ —||— zprava

d) $(AB)^T = B^T C^T$

e) $AI_n = I_m A = A$ pro $A \ldots m \times n$

za předpokladu, že všechny součty a součiny matic v příslušné rovnosti jsou definovány.

Důkaz a): $A \ldots m \times n$, $B \ldots n \times p$, $C \ldots p \times q$

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (AB)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{i\ell} b_{\ell k} c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{p} b_{\ell k} c_{kj} \right)}_{(BC)_{\ell j}} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} (BC)_{\ell j} = (A(BC))_{ij}$$

b, c, d – obdobně – sami ∎

ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ OPERACE POMOCÍ MATICOVÉHO NÁSOBENÍ

Pozorování: Nechť B je matice vzniklá z A

a) vynásobením i-tého řádku číslem t. Pak $B = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & t & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} A$.

$e_{ii} = t$
$e_{jj} = 1, j \neq i$
$e_{kl} = 0 \; k \neq l$

b) přičtením j-tého řádku k i-tému. Pak $B = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & 1 & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} A$.

$e_{jj} = 1$
$e_{ij} = 1$
jinak $= 0$

Důsledek: Je-li B matice vzniklá z A posloupností el. ř. úprav, pak existuje čtvercová matice C t. ž. $B = CA$.

Definice: Řekneme, že matice B je inverzní k matici A typu $n \times n$, pokud $AB = I_n$. Pokud inverzní matice k A existuje, značíme ji A^{-1}.

Čtvercová matice A, $n \times n$, je regulární, pokud $\mathrm{rank}(A) = n$.

Věta: Matice A, $n \times n$, má inverzní matici, právě když je regulární.