OPAKOVÁNÍ: Soustava lin. rovnic $Ax=b$ LA1 9/10/2023

Elementární řádkové úpravy:

- vynásobení řádku i: $\otimes_i^t$
- přičtení řádku i k j: $\oplus_i^j$
- prohození řádků i a j: $\leftrightarrows_j^i$

Platí: nemění množinu řešení

pohledy:

- průnik (rovin, přímek, ...)
- lineární kombinace sloupců
- $A \sim$ zobrazení

příklad ....

GAUSSOVA ELIMINACE

Vstup: $(A|b)$

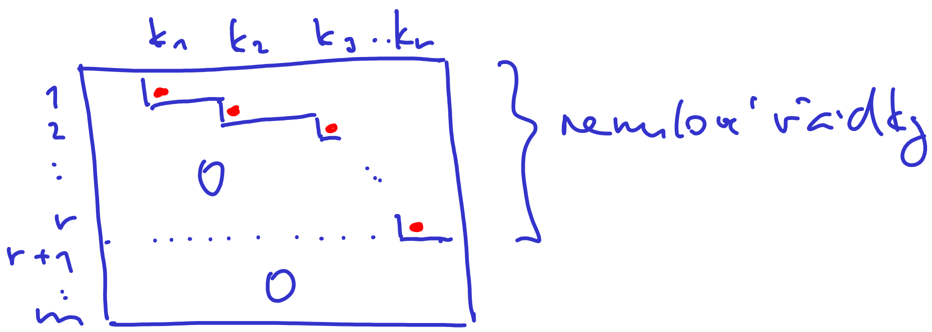
Hledáme řešení soustavy $Ax=b$

Plán: 1. Převést $(A|b)$ pomocí EŘÚ do "hezkého" tvaru - tzv. odstupňovaný tvar matice

2. Dopočítat ("vyčíst") tzv. zpětnou substitucí řešení

Def: Matice $C^{m\times n}$ je v odstupňovaném tvaru, pokud existuje číslo $r \in \{0,1,\dots,m\}$ tž.

- řádky $r+1, r+2, \dots, m$ jsou celé nulové, a
- $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ kde $k_i := \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$

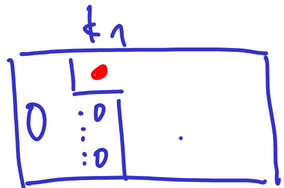


- červené puntíky - nenulové prvky na pozicích $(1,k_1), (1,k_2), \dots, (1,k_r)$ - tzv. pivoty

Sloupce a proměnné indexované $k_1, k_2, \dots, k_r$ jsou bázické, ostatní jsou nebázické (= volné)

ALGORITMUS NA PŘEVEDENÍ MATICE $C^{m\times n}$ DO ODSTUPŇOVANÉHO TVARU

1. Najdi první nenulový sloupec - index k_1
   Pokud neexistuje - konec, matice je celá nulová, tedy v odst. tvaru
2. Pokud $c_{1k_1} = 0$, prohoď řádek 1 s libovolným řádkem i tž. $c_{ik_1} \neq 0$
3. Pro $i = 2, 3, \dots, m$: přičti $\left(-\frac{c_{ik_1}}{c_{1k_1}}\right)$-násobek řádku 1 k řádku i
4. Aplikuj celý postup na matici bez prvního řádku.



Po 2. kroku: $c_{1k_1} \neq 0$

Po 3. kroku: $c_{2k_1} = c_{3k_1} = \dots = c_{mk_1} = 0$

je vidět z popisu algoritmu

Všimni si: alg. skončí!

Tvrzení: Algoritmus převede C do odst. tvaru.

Důkaz: indukcí podle počtu řádků matice C

jediný řádek: C už je v odst. tvaru (buď $r=0$ ... $c=(0 0 \dots 0)$, nebo $r=1$)
a alg. C nezmění

$m > 1$ řádků:

Díky víme, že volání alg. v kroku 4 nebude měnit sloupce $1, 2, \dots, k_1$

Díky indukčnímu předpokladu víme, že řádky $2, \dots, m$ upraví do odstupňovaného tvaru, a první nenulový sloupec má index $> k_1$

$\Rightarrow$ celá matice je v odst. tvaru

Příklad: $\oplus_j^{i}$ $\otimes_t^{i}$ $\oplus_{tj}^{i}$ $\circlearrowleft_j^{i}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\circlearrowleft_2^1 \ \oplus_1^3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\oplus_{-\frac{1}{3}2}^{3}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} k_1=1 & k_2=2 & & k_3=4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

$r = 3$
$\text{rank} = 3$

Věta (Řešení soustavy lineárních rovnic).
Nechť $(A'|b')$ je matice v odstupňovaném tvaru vzniklá pomocí EŘÚ z rozšířené matice $(A|b)$ soustavy $Ax=b$.
Pak 1) je-li nějaké b'_i pivotem $(A'|b')$,
soustava $Ax=b$ nemá žádné řešení.
2) není-li žádné b'_i pivotem $(A'|b')$, pak
a) pokud každý sloupec A' obsahuje pivota, má $Ax=b$ právě jedno řešení.
b) pokud alespoň jeden sloupec A' neobsahuje žádného pivota, má $Ax=b$ nekonečně mnoho řešení.
Navíc platí, že pro každé nastavení volných (=nebázických) proměnných je nastavení bázických jednoznačně určeno.

Důkaz: 1) řádek i, kde b'_i je pivotem, má v části A' samé 0, tedy odpovídá rovnici $\underbrace{0x_1+0x_2+\dots+0x_n}_{=0}=b'_i \neq 0$
což je nesplnitelné.

2) Indukcí podle $i=n,n-1,\dots,2,1$ dokážeme:
hodnoty proměnných $x_i,x_{i+1},\dots,x_n$ jsou jednoznačně dány, pokud splňují rovnice $i,i+1,\dots,n$
$i=n$: n-tá rovnice: $\underbrace{0x_1+0x_2+\dots+0x_{n-1}}_{0}+a'_{nn}x_n=b'_n$ $\quad a'_{nn}\neq 0$ pivot

$\Rightarrow x_n=\dfrac{b'_n}{a'_{nn}}$

indukční krok: $i+1 \to i$

jednoznačně dané dle ind. předp.

i-té rovnice

$$\underbrace{0x_1 + \dots + 0x_{i-1}}_{0} + \overset{\neq 0}{a'_{ii}}\, x_i + \underbrace{a'_{i,i+1} x_{i+1} + \dots + a'_{in} x_n}_{\Delta} = b'_i$$

pivot

$$\Rightarrow x_i = \frac{b'_i - \Delta}{a'_{ii}}$$ – jednoznačné, tj. i-tá rovnice splněna

b) označme r počet pivotů A', a $k_1, k_2, \dots, k_r$ indexy bázických sloupců

<u>indukcí</u> podle $i = r, r-1, \dots, 2, 1$ dokážeme:

pro libovolné hodnoty volných proměnných s indexem $> k_i$

jsou hodnoty bázických proměnných $k_i, \dots, k_r$

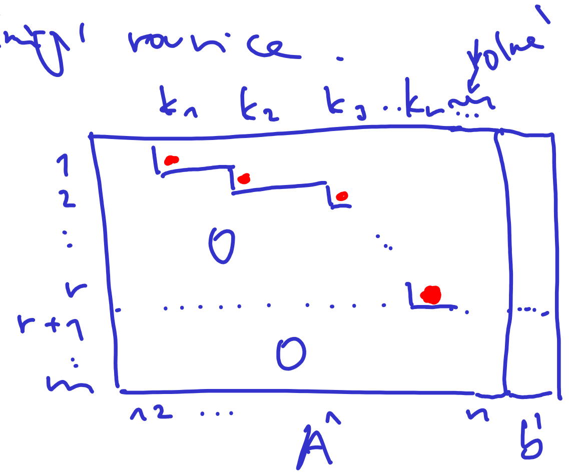
jednoznačně dány, pokud splňují rovnice.

• $i = r$: r-tá rovnice říká:

$$\underbrace{\overset{\neq 0}{a'_{rk_r}} \cdot x_{k_r} + \sum_{j=k_r+1}^{n} a'_{rj} \cdot x_j = b'_r}$$

pivot

samé volné proměnné



x_{k_r} je jednoznačně dáno pro libovolnou volbu $x_{k_r+1}, x_{k_r+2}, \dots, x_n$

• indukční krok: $i+1 \to i$

i-tá rovnice

$$\overset{\neq 0}{a'_{ik_i}} \cdot x_{k_i} + \sum_{j=k_i+1}^{n} a'_{ij} x_j = b'_i$$

pivot

← podle indukčního předpokladu, všechny bázické proměnné v Σ už jsou jednoznačně určeny

x_{k_i} jednoznačně určeno

■

výpočet bázických x_i odzadu – <u>ZPĚTNÁ SUBSTITUCE</u>