LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ – pokračování 2

8/1/2024

připomenutí: vzájemně jednoznačné (bijektivní) lin. zobr. nazýváme **izomorfismus**

Tvrzení: Nechť U a V jsou VP nad T, $f: U \to V$ je izomorfismus a $B = (b_1, \dots, b_k)$ je báze U. Pak $(f(b_1), \dots, f(b_k))$ je báze V.

Důkaz: už víme, že $(f(b_1), \dots, f(b_k))$ je SG $f(U) = V$.

Předp. že $\sum_{i=1}^{k} t_i f(b_i) = 0$, pro nějaká $t_i \in T$.

$\parallel \leftarrow$ f je lin. zobr.

Pak
$$f\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} t_i \cdot b_i}_{=0}\Big) \quad \leftarrow f \text{ je bijekce}$$

$\Rightarrow t_1 = \dots = t_k = 0$, protože $(b_1, \dots, b_k)$ je báze

$\Rightarrow$ vektory $f(b_1), \dots, f(b_k)$ jsou LN. $\Rightarrow$ je to báze. ■

Důsledek: $\dim(U) = \dim(V)$.

Pozorování: Je-li f izomorfismus, pak f^{-1} je též izomorfismus.

Dk: nutno ověřit, že f^{-1} je lineární – DÚ.

Věta: Nechť U a V jsou VP nad T s konečnými bázemi B a C. Pak lineární zobrazení $f: U \to V$ je izomorfismus právě když matice ${}_C[f]_B$ je regulární.

Důkaz: $\Rightarrow$ protože stejná dimenze U a V, matice f je čtvercová; matice zobr. f^{-1} je také čtvercová a stejného rozměru.

Uvaž složení $f^{-1} \circ f = id$. Víme $\boxed{{}_B[f^{-1}]_C \cdot {}_C[f]_B = {}_B[id]_B = I}$

tj. máme inverzní matici.

$\Leftarrow$ uvažme zobrazení $g: V \to U$ t.ž. ${}_B[g]_C = ({}_C[f]_B)^{-1}$.

Pak i) ${}_B[g \circ f]_B = {}_B[g]_C \, {}_C[f]_B = I$ tj. f je prosté

ii) ${}_C[f \circ g]_C = {}_C[f]_B \, {}_B[g]_C = I$ f je "na" ■

ověř: udělat!

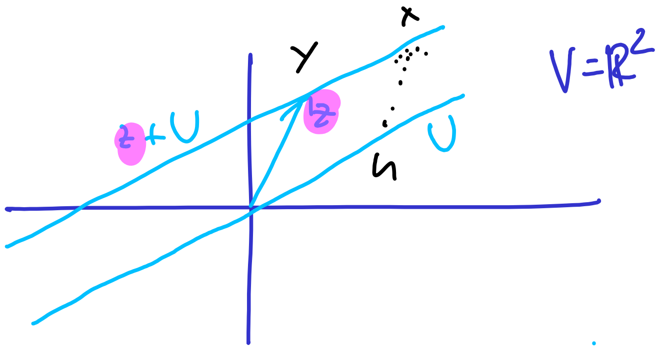
AFINNÍ PODPROSTORY

Def: Podmnožina F VP V se nazývá afinní podprostor v V, pokud je tvaru $F = \underbrace{\{z + u : u \in U\}}_{\text{značíme } z+U}$, kde U je vektorový podprostor V a $z \in V$.

Definice $\dim(F) = \dim(U)$.

pozn. affinní ... z latiny - příbuzný

Př:



$V = \mathbb{R}^2$

„posunutý" vekt. podprostor

Pozorování: Pro AP $F = z + U$ platí: $U = \{x - y : x, y \in F\}$

Důkaz: $\subseteq$ uvažme $u \in U$.

Pak $x = z + u \in F$

$y = z + 0 \in F$

$u = x - y$

„F jednoznačně určuje U"

$\supseteq$ uvaž libovolné $x, y \in F$. Dle def. F,

$x = z + a$, $y = z + b$, pro nějaké $a, b \in U$.

Pak $x - y = a - b \in U$. $\square$

Terminologie: afinní podprostor:
- dim 1 - přímka
- dim 2 - rovina
- dim $n-1$ - tzv. nadrovina

Souvislost se soustavami lin. rovnic

Věta: Množina řešení soustavy lin. rovnic $Ax=b$ je buď prázdná, nebo tvaru $x_0 + L$, kde x_0 je nějaké libovolné řešení soustavy $Ax=b$, a $L = \mathrm{Ker}(A)$.

Více: jádro matice je podprostor

Důkaz: (pro úplnost – vlastně už víme)

Ozn. $\check{R} = \{x : Ax=b\}$. Předpokládejme $\check{R} \neq \emptyset$, a vezmeme nějaké $x_0 \in \check{R}$.

Chceme ověřit: $\check{R} = x_0 + \mathrm{Ker}(A)$.

$\subseteq$: uvaž $x_1 \in \check{R}$. Pak $A(x_1 - x_0) = 0$, tj. $x_1 - x_0 \in \mathrm{Ker}(A)$

$$x_1 = x_0 + x_1 - x_0 \checkmark$$

← x_1 má požadovaný tvar

$\supseteq$: uvaž $x_2 \in \mathrm{Ker}(A)$. Pak $A(x_0 + x_2) = Ax_0 + Ax_2 = b + 0 = b$, tj. $x_0 + x_2 \in \check{R}$. ∎

ZMĚNA BÁZE A KOMPRESE OBRÁZKU (JPEG 2000)

$V = \mathbb{R}^4$, $\quad K = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$

Nechť

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right)$$

(lze zobecnit pro $\mathbb{R}^n$)

je tzv. Haarova báze $\mathbb{R}^4$ $\rightarrow$ $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Označme $W = {}_K[id]_B$:

Lze dopočítat: $W^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = {}_B[id]_K$

Uvažme libovolné $x \in \mathbb{R}^4$, a jeho souřadnice vůči bázi B:

$$[x]_B = {}_B[id]_K [x]_K = W^{-1} \cdot x$$

platí: $h_1 = \frac{\sum x_i}{4}$ .... průměr

$h_2 = \frac{x_1 + x_2}{4} - \frac{x_3 + x_4}{4} = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\sum x_i}{4}$ .... jak se průměr x_1, x_2 liší od celkového

⋮

Uvažme černobílý obrázek 4×4, stupně šedi $0 - 255$ - matice 4×4, s celočíselnými elementy. Označme A.

Chtěli bychom A přibližně úsporně zachovat.

Idea: budeme 1. sloupce reprezentovat v bázi B

$$A \rightarrow W^{-1} A \rightarrow (W^{-1}A)(W^{-1})^T = A'$$

2. řádky upravené matice reprezentovat v bázi B
3. V matici A' zapomeneme malé hodnoty $\rightsquigarrow \bar{A}$
4. Převedeme zpět do kanonické báze $W \cdot \bar{A} \cdot W^T$

Všimněme si: bez zaokrouhlení to je reverzibilní: $A = W \cdot A' \cdot W^T$.

Pr. pro $A = \begin{pmatrix} 20 & 22 & 24 & 26 \\ 18 & 20 & 22 & 24 \\ 16 & 18 & 20 & 22 \\ 14 & 16 & 18 & 20 \end{pmatrix}$

dostaneme $A' = \begin{pmatrix} 20 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ - většina položek 0