Lineární zobrazení – pokračování

18/12/2023

Pozorování: Nechť $f: U \to V$ je lin. zobrazení; U, V jsou VP nad T.
Pak pro každé $a_1, \ldots, a_n \in T$, $u_1, \ldots, u_n \in U$: $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i)$.

Důkaz: DÚ – indukce.

Tvrzení: Nechť U a V jsou VP nad T a $(u_1, \ldots, u_n)$ je báze U.
Pak pro každou n-tici $v_1, \ldots, v_n \in V$ existuje právě jedno lin. zobrazení $f: U \to V$ tž. $\forall i = 1, \ldots, n$, $f(u_i) = v_i$.

Smysl: známe obrazy báze, známe celé zobrazení.

Důkaz: uvaž libovolné $x \in U$. Pak $\exists$ právě jedna LK

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \quad \text{, protože } u_1, \ldots, u_n \text{ je báze}$$

Proto $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) \underset{\text{pozorování}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i)$, tj. $f(x)$ je jednoznačně určeno. ■

Důsledek: $\dim(f(U)) \leq \dim(U)$.

Dk: pro $f(U)$ máme SG velikosti $\dim(U)$.

Def: Pro lin. zobr. $f: U \to V$ a $g: V \to W$ definujeme **složení** $f \circ g$ jako zobrazení $g \circ f$ z U do W tž. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\forall x \in U$.

Tvrzení: Jsou-li $f: U \to V$ a $g: V \to W$ lin. zobrazení, pak $g \circ f$ je opět lineární zobrazení.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Důkaz: pro libovolné $u, v \in U$ platí:

$$(g \circ f)(u+v) \overset{\text{def. } g\circ f}{=} g(f(u+v)) \overset{f \text{ je lin. zobr.}}{=} g(f(u)+f(v)) \overset{g \text{ je lin. zobr.}}{=} g(f(u)) + g(f(v))$$
$$\overset{\text{def. } g\circ f}{=} (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v)$$

podobně pro $(g \circ f)(t \cdot u)$.

Věta: Nechť $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineární zobrazení. Pak f má podobu $f(x) = A\cdot x$, kde A je matice, jejíž i-tý sloupec je $f(e_i)$ (kde e_i je i-tý sloupec I_n).

Důkaz: Z vlastností lineárního zobrazení plyne:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot f(e_i) = Ax. \qquad \square$$

Pozn: minule příklady, kdy bylo lin. zobr. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vyjádřeno pomocí maticového násobení. Jde to vždy.

Uvidíme: platí nejen pro aritmetické VP.

Definice: Nechť U a V jsou VP nad T s bázemi $B = (b_1, \dots, b_n)$ a $C = (c_1, \dots, c_m)$, a $f: U \to V$ je lineární zobrazení.

Matice lin. zobr. f vzhledem k bázím B a C je matice $m \times n$:

$$ {}_C[f]_B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [f(b_1)]_C & \cdots & [f(b_n)]_C \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

(i-tý sloupec jsou souřadnice i-tého obrazu b_i báze B VP U v bázi C VP V)

Smysl: máme $u \in U$ a jeho souřadnice $[u]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, zajímají nás souřadnice $[f(u)]_C$:

$$[f(u)]_C = \left[f\left(\sum_{i=1}^n x_i b_i\right)\right]_C = \left[\sum_{i=1}^n x_i f(b_i)\right]_C = \sum_{i=1}^n x_i [f(b_i)]_C$$

$$= {}_C[f]_B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}_C[f]_B \cdot [u]_B.$$

Tvrzení: Pro VP U, V nad T s bázemi B a C, a lin. zobr. $f: U \to V$, platí: $\forall u \in U$, $[f(u)]_C = {}_C[f]_B \cdot [u]_B$.

Příklad: Uvažme $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 \quad\quad + x_3 \end{pmatrix}, \quad \text{ozn. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a báze $B = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_3} \right)$, $B' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b_1'}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b_2'}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_3'} \right)$ ve $\mathbb{R}^3$,

$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $C' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c_1'}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{c_2'} \right)$.

B, C - kanonické báze

Vidíme: $f(x) = Ax$, tedy ${}_C[f]_B = A$.

Chceme ${}_{C'}[f]_{B'} = \left([f(b_1')]_{C'} \; [f(b_2')]_{C'} \; [f(b_3')]_{C'} \right)$.

$f(b_1') = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix} = 7 \cdot c_1' + 0 \cdot c_2'$ tj. $[f(b_1')]_{C'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

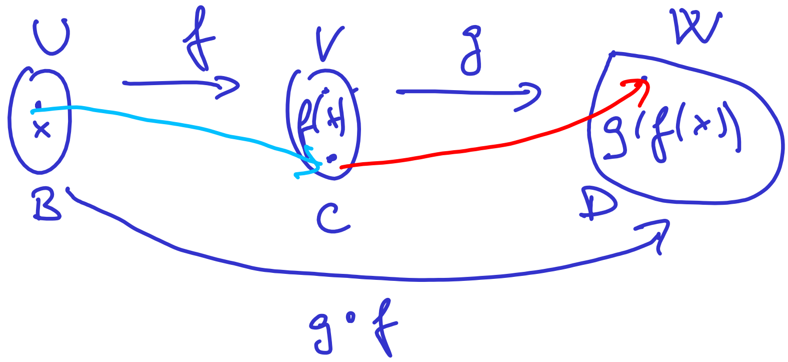
$f(b_2') = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot c_1' + 4 \cdot c_2'$ $\quad [f(b_2')]_{C'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$f(b_3') = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot c_1' + 1 \cdot c_2'$ $\quad [f(b_3')]_{C'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow {}_{C'}[f]_{B'} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Věta (Matice složeného lin. zobrazení): Nechť U, V, W jsou VP nad T s bázemi B, C a D, a nechť $f: U \to V$ a $g: V \to W$ jsou lineární zobrazení. Pak

$$ {}_D[g\circ f]_B = {}_D[g]_C \cdot {}_C[f]_B . $$



Důkaz: uvažme libovolné $x \in U$

$$ [(g\circ f)(x)]_D \overset{\text{def. } \circ}{=} [g(f(x))]_D \overset{\text{vlastnosti } g \text{ jako lin. zob.}}{=} {}_D[g]_C \, [f(x)]_C \overset{\text{vlastnosti } f \text{ jako lin. zobr.}}{=} $$

$$ = {}_D[g]_C \cdot {}_C[f]_B \, [x]_B $$

tj. součin se chová jako matice lin. zobr. $g\circ f$ mezi bázemi B a D – to jsme chtěli dokázat. ∎

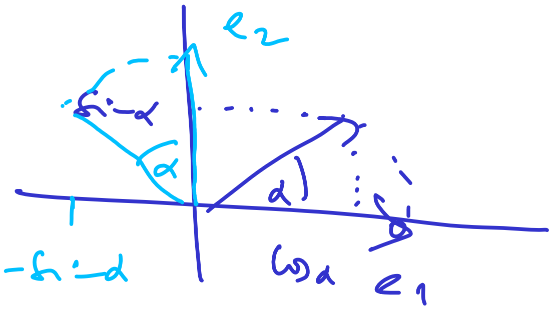
Příklad: otočení

Definice: Nechť V je VP a B, C jeho dvě konečné báze. Pak matici ${}_C[id]_B$ nazýváme matice přechodu od báze B k bázi C.

Příklad: Uvažme $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ popisující rotaci o α.
Chceme matici f vůči kanonické bázi (e_1,e_2).

$$f(e_1)=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$f(e_2)=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$



$${}_K[f]_K=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

Nechť f_α je otočení o α, f_β otočení o β.

Chceme $f=f_\beta\circ f_\alpha$ (tj. otočení o $\alpha+\beta$)

a jeho matici vůči kanonické bázi.

Dle předchozí věty:

$${}_K[f]_K=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \quad \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & \text{atd.}\\ \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta & \end{pmatrix}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \quad \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$$

tj. získali jsme součtové vzorce.