Opakování:

11/12/2023

Tvrzení: Nechť $(v_1,\dots,v_n)$ je báze VP V. Pak každý $w\in V$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako LK $v_1,\dots,v_n$.

Definice: Nechť $B=(v_1,\dots,v_n)$ je báze VP $\overbrace{V}^{\text{nad } T}$ a $w\in V$. **Souřadnice** w vůči bázi B rozumíme koeficienty $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in T$ t.ž. $w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$. Značíme $[w]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

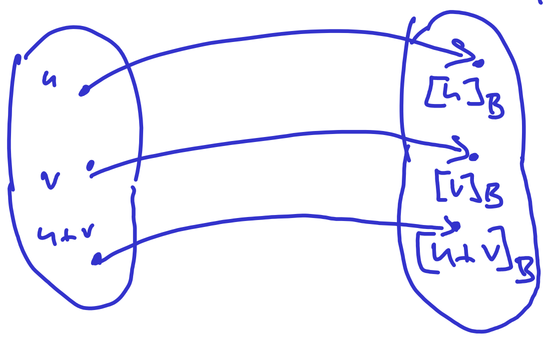
Pozorování: Nechť B je konečná báze VP V nad T, $u,v\in V$ a $\alpha\in T$. Pak platí: $[u+v]_B=[u]_B+[v]_B$

Dk - DÚ! operace v V $[\alpha u]_B=\alpha\cdot[u]_B$. operace v T^n, kde $n=\dim V$

„Všechny vektorové prostory nad T dimenze n jsou v podstatě T^n."

více (přesněji) později

V nad T dim n $\qquad\qquad$ T^n



Definice: Nechť U, W jsou podprostory VP V. Pak **spojení prostorů** U a W je $U+W := \{u+w : u \in U, w \in W\}$.

Tvrzení: $U+W = \mathcal{L}(U \cup W)$.

Důkaz: $\subseteq$ triviální – $\mathcal{L}(U \cup W)$ uzavřený na $+$

$\supseteq$ stačí ukázat, že $U+W$ je podprostor –

– díky charakterizac. $\mathcal{L}(U \cup W)$ jako průnik všech podprostorů, které obsahují $U \cup W$.

tj. chceme uzavřenost $U+W$ na sčítání a násobení skalárem

- uvažme $x, y \in U+W$. Pak $\exists$ $x_1, y_1 \in U$ t.ž. $x = x_1 + x_2$
  $x_2, y_2 \in W$. $y = y_1 + y_2$

$$\Rightarrow x+y = \overbrace{(x_1+y_1)}^{\in U} + \overbrace{(x_2+y_2)}^{\in W} \in U+W$$

- podobně pro $x \in U+W$. $\exists x_1 \in U, x_2 \in W$ $x = x_1 + x_2$

$$\alpha \cdot x = \alpha(x_1+x_2) = \overbrace{\alpha x_1}^{\in U} + \overbrace{\alpha x_2}^{\in W} \in U+W$$ ∎

Věta (**Dimenze spojení a průniku**). Nechť U, W jsou konečně generované podprostory VP V. Pak

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Důkaz: $U \cap W$ je podprostorem, konečně generovaný, vezměme jeho bázi $z_1, \dots, z_k$. Dle Steinitzovy věty: existují báze $z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_\ell$ podprostoru U
$z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_p$ — " — W.

Chceme: $z_1, \dots, z_k, v_1, \dots, v_\ell, w_1, \dots, w_p$ je báze $U+W$.

- SG – jasné,
- LN: předp. že

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i v_i}_{\in V} + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i w_i = 0$$

$$\in V \cap W \Leftarrow \Big\{ = \underbrace{-\sum_{i=1}^{p} \gamma_i w_i}_{\in W}$$

Díky jednoznačnosti vyjádření pomocí báze $\Rightarrow \forall i, \beta_i = 0$

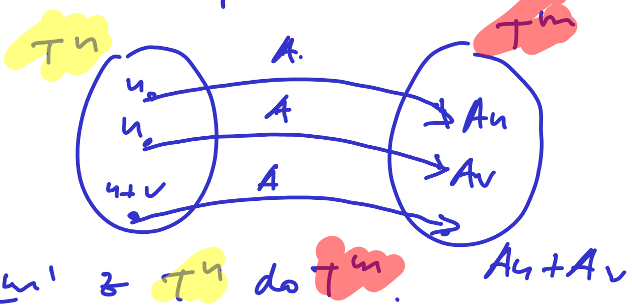
Zbývá nám $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{p} \gamma_i w_i = 0 \overset{LN}{\Longrightarrow} \forall i \, \alpha_i = 0, \forall \gamma_i = 0$ ∎

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

Vzpomeňme na maticové násobení.

Pro $A \in T^{m\times n}$, libovolné $u, v \in T^n$ a $t \in T$ platí:

$$A(u+v) = Au + Av$$
$$A(tu) = t(Au).$$

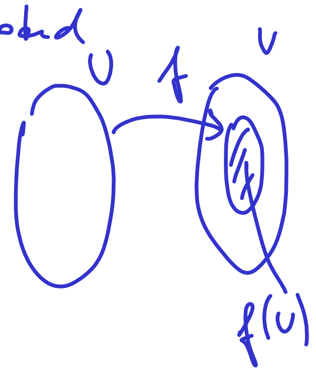


násobení maticí A jako zobrazení z T^n do T^m.

Definice: Nechť U, V jsou VP nad týmž tělesem T.

Řekneme, že $f: U \to V$ je lineární zobrazení pokud

$\forall u, v \in U$, $\forall t \in T$:
$$f(u+v) = f(u) + f(v)$$
$$f(t\cdot u) = t\cdot f(u).$$



Pozorování 0: $f(U)$ je podprostor V.

Důkaz: jasné z definice – uzavřenost platí.

Pozorování 1: Pro každé lin. zobrazení $f: U \to V$ platí: $f(0) = 0$.

nulový vektor U

nulový vektor V

Důkaz: $f(0) = f(0\cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$. ∎

neutrální prvek tělesa

Příklady:

⓪ Pro VP V a $u \in V$, $u \neq 0$: $f(x) = x + u$, $\forall x \in V$ není lin. z.

① Pro libovolný VP V nad T : $f(x) = 0$, $\forall x \in V$ – nulové zobrazení

$f: V \to \{0\}$

② Pro podprostor U VP V : $f(x) = x$, $\forall x \in U$ – identita

$f: V \to V$

③ Pro aritmetický VP $V = T^n$, $i \le n$: $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n$ – projekce

$f: T^n \to T$

④ Pro libovolný VP V dimenze n nad T a libovolnou bázi B :

$f(x) = [x]_B$, $\forall x \in V$, je lin. zobr. $f: V \to T^n$

Definice: Bijektivní (1-1) lin. zobrazení nazýváme **izomorfismus**.

Tvrzení: Každý VP V nad T dimenze n je izomorfní s aritmetickým VP T^n.

Důkaz: Uvaž lib. bázi B. Už víme, že $f: u \to [u]_B$ je lin. zobr. Protože souřadnice $[u]_B$ jednoznačně určují u, je to 1-1 zobr. ∎

Příklady: (5) uvažme některá $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Značím: $f(x,y) = f\left(\binom{x}{y}\right)$

- $f(x,y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y)^T$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

  pro $\alpha > 1$ zvětšení

  $\alpha < 1$ zmenšení

- $f(x,y) = (-x, y)^T$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ osová souměrnost (dle osy y)

  $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- $f(x,y) = (-x, -y)^T$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ otočení o $180°$ dle počátku

  $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Časem uvidíme, že každé lin. zobr. lze reprezentovat pomocí maticového násobení.