Opakování: • VP V nad T, • $\mathcal{L}(X)$, pro $X \subseteq V$ 4/12/2023

• systém generátorů (SG)

• lineárně nezávislý soubor vektorů (LN)

• báze: soubor, který i) SG ii) LN – okomentovat!

• Platí: každý konečně generovaný VP má bázi.

každé dvě báze jsou stejně velké (ze Stein. věty)

• pojem dimenze: velikost báze

Připomenutí: Steinitzova věta: Je-li $N = (w_1, \dots, w_m)$ LN soubor vektorů VP V a $G = (v_1, \dots, v_n)$ je SG VP V, pak $m \leq n$ a některých m vektorů z G lze nahradit vektory z N tž. dostaneme opět SG.

Důsledek 2: Libovolný LN soubor vektorů v konečně generovaném VP lze doplnit na bázi.

Důsledek 3: Je-li W podprostor konečně generovaného prostoru V, pak $\dim(W) \leq \dim(V)$. Platí-li rovnost, pak $W = V$.

Dk: vezmu: B – báze W, C – báze V $\dim(W)$ $\dim(V)$

B je LN ve V, tedy dle Stein. věty, $|B| \leq |C|$

Pokud $\dim(W) = \dim(V)$, dle Stein. věty nahradí $|B|$ vektorů v C vektory z B - dostaneme soubor B který je SG pro V - tj. $\mathcal{L}(B) = V$ & $\mathcal{L}(B) = W$ ☒

PROSTORY MATIC

Už víme: Pro matici A a regulární R: $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(RA)$
$$\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Ker}(RA)$$

Zajímá nás: $\mathcal{S}(A) \overset{?}{\neq} \mathcal{S}(RA)$

Věta: Pro matici $A^{m\times n}$ a regulární $R^{m\times m}$: $\dim(\mathcal{S}(A))=\dim(\mathcal{S}(RA))$.

plyne z následujícího tvrzení: (najdeme pro $\mathcal{S}(RA)$ stejně velkou bázi, jako má $\mathcal{S}(A)$)

Tvrzení: Je-li $(v_1,\dots,v_k)$ báze $\mathcal{S}(A)$,

pak $\overbrace{(Rv_1,\dots,Rv_k)}^{(*)}$ je báze $\mathcal{S}(RA)$.

Důkaz: chceme i) $(*)$ je SG $\mathcal{S}(RA)$ ii) $(*)$ je LN

i) uvaž $w\in\mathcal{S}(RA)$. Označme $u_1,\dots,u_n$ sloupce A,

$u_1',\dots,u_n'$ sloupce RA, tj. $u_i'=Ru_i$

Pak $w=\sum_{i=1}^n a_i u_i' = \sum_{i=1}^n a_i R u_i = R\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i u_i}_{\in\mathcal{S}(A)} =$

$v_1..v_k$ je báze $\mathcal{S}(A)$ $\Rightarrow \exists\, b_1,..b_k$

$= R\cdot\sum_{i=1}^k b_i v_i = \sum_{i=1}^k b_i(Rv_i)$

ii) sporem: kdyby $Rv_1,\dots,Rv_k$ byly LZ, tak

$\exists\, a_1,\dots,a_k$, aspoň jedno nenulové, t.ž. $\sum_{i=1}^k a_i R v_i=0$.

Pak ale $R\sum_{i=1}^k a_i v_i = 0$. R regulární $\Rightarrow$

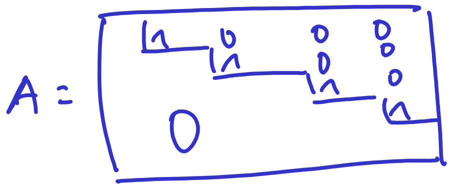
tedy $\sum_{i=1}^k a_i v_i = 0$ – spor s LN $v_1,\dots,v_k$. ∎

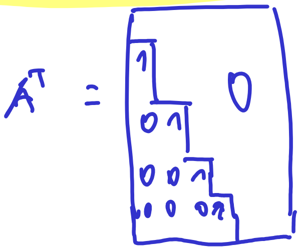
nulový vektor

Pro matici A: $\operatorname{rank}(A) = \dim(\mathcal{R}(A))$, $\operatorname{rank}(A^T) = \dim(\mathcal{S}(A))$.

Věta: Pro každou matici A typu $m \times n$, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$.

Důkaz: Uvaž nejprve A v redukovaném odst. tvaru:





0, 1 – neutrální prvky vůči +, ·

Řádky s pivoty tvoří bázi $\mathcal{R}(A)$: jsou SG $\mathcal{R}(A)$, LN

Sloupce s pivoty tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$: jsou SG $\mathcal{S}(A)$, LN

Jiné vyjádření věty: $\operatorname{rank}(A) = \dim(\mathcal{S}(A))$

Pro matici A uvaž regulární matici R t.ž. RA je v redukovaném odst. tvaru.

Víme: $\operatorname{rank}(A) \overset{\text{minule}}{=} \operatorname{rank}(RA) = \dim(\mathcal{S}(RA)) \underset{\text{předchozí věta}}{=}$

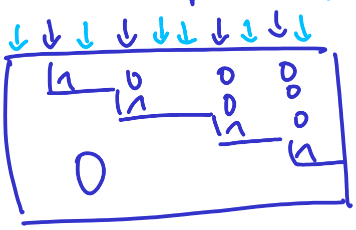
$= \dim(\mathcal{S}(A)) = \operatorname{rank}(A^T)$ ∎

Věta: $\dim(\operatorname{Ker}(A)) + \operatorname{rank}(A) = n$.

Důkaz: $A \dots m \times n$

Vzpomeňme na strukturu řešení homogenní soustavy $Ax = 0$.

bázické prom. – volné proměnné: $n - \operatorname{rank}(A)$ jich máme — zpětná substituce



↑ redukt. odst. tvar A (1 jsou neutrální prvky pro "násobení")

Víme: • hodnoty volných proměnných jednoznačně určují celé řešení, a naopak.

• každé nastavení volných proměnných lze získat jako LK $n - \operatorname{rank}(A)$ vektorů volných proměnných:

$$n-\operatorname{rank}(A)\left\{ \underset{1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}, \underset{2}{\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}}, \dots, \underset{n-\operatorname{rank}(A)}{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}} \right.$$

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(A)) = \overbrace{n - \operatorname{rank}(A)}^{\#\text{volných p.}}$$ ∎

Tvrzení: $\operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$, má-li AB smysl.

Důkaz: všimněme si $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(B) \Rightarrow \dim(\mathcal{R}(AB)) \le \dim(\mathcal{R}(B)) = \operatorname{rank}(B)$

podobně: $\mathcal{S}(AB) \subseteq \mathcal{S}(A) \Rightarrow \underbrace{\dim(\mathcal{S}(AB))}_{\operatorname{rank}(AB)} \le \dim(\mathcal{S}(A)) = \operatorname{rank}(A)$ ∎

Tvrzení: Nechť $(v_1,\dots,v_n)$ je báze VP V. Pak každý $w\in V$ lze vyjádřit právě jedním způsobem jako LK $v_1,\dots,v_n$.

Důkaz: • protože $(v_1,\dots,v_n)$ je SG, jistě lze každý $w\in V$ vyjádřit jako nějakou LK

• jednoznačnost: sporem.

Předp. $\exists\, w\in V$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\neq(\beta_1,\dots,\beta_n)$ t.ž.

$$w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$$

Pak $$0=w-w=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\beta_i)v_i \; -$$

– máme netriviální kombinaci $v_1,\dots,v_n$ rovnou 0 – spor ☒

Definice: Nechť $B=(v_1,\dots,v_n)$ je báze VP V nad T a $w\in V$. **Souřadnicemi** w vůči bázi B rozumíme koeficienty $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in T$ t.ž. $w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$. Značíme $[w]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$.

Pozn. díky Tvrzení má smysl.

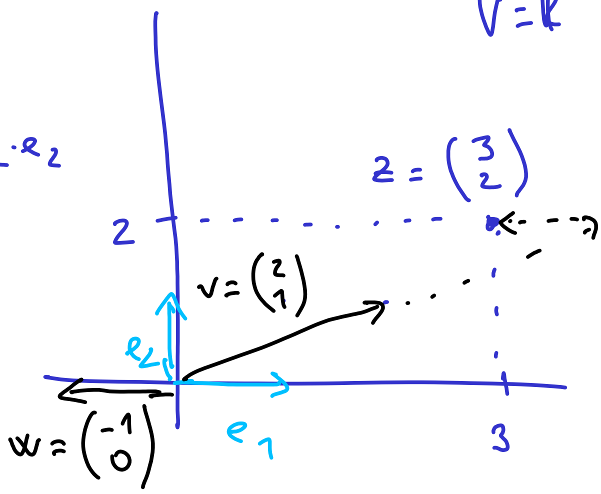
Příklad

$B=\{e_1,e_2\}$

$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\cdot e_1+2\cdot e_2$

$[z]_B=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$V=\mathbb{R}^2$



$B'=\{v,w\}$

$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=2\cdot v+1\cdot w$

$[z]_{B'}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Pozorování: Nechť B je konečná báze VP V nad T, $u,v\in V$ a $\alpha\in T$. Pak platí: $[u+v]_B=[u]_B+[v]_B$

operace v V $\quad[\alpha u]_B=\alpha\cdot[u]_B$. $\quad$ operace v T^n

Dk – DÚ.