

2/10/2023

O matematice, a zvláště o LA

• krása & užitečnost

pro ty, kdo hledají užitečnost (krása snad bude vidět)

lineární algebra užitečná pro

- grafika a počítačové vidění

- kryptografie a kódování

- optimalizace

- zpracování dat

- umělé inteligence (strojové učení)

- bioinformatika

- LA ... studium placatých objektů a zobrazení mezi nimi
jednoduché & praktické

O něm se

- Nejen otázky Co?, Jak?,

ale hlavně PROČ?

- Půjde nám o intuici (vhled) i preciznost

- Přednášky = ja: snaha o vysvětlení
vy: naučit se

NEDEMOKRATICKE' VOLBY

temizoy' klub vol' predsjednik

System:

- každý člen klubu má jeden delitelny' hlas
- každý muž vol' každ' dva kandidaty' z ostatnich, z nichz každý dostane stejny' díl jeho hlasu

Wapr. členové Adam, Borěk, Cyril, David

$$\text{Adam vol' } V_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{Borěk } V_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{Cyril } V_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{David } V_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Při uspořádání do tabulky:

sloupce - jak kdo volí

řádky - co kdo získal

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \begin{pmatrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- výsledek volby je čtveřice reálných čísel

$$H = (h_A, h_B, h_C, h_D) \quad \text{splňující}$$

$$\begin{cases} \text{řádek (A)} \cdot H = h_A \\ \text{řádek (B)} \cdot H = h_B \\ \vdots \end{cases} \quad \text{tj.} \quad 0 \cdot h_A + \frac{1}{2} \cdot h_B + 0 \cdot h_C + 1 \cdot h_D = h_A$$

("součet součinů po sloupcích")

- vitěz je člen s největší hodnotou h

- INTERPRETACE: h_A je důležitost člena A, a td.

důležitější má silnější hlas

Jak spravedlivě určit důležitost? Rovnost! (X)

V našem příkladu máme

$$H = \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, 1 \right) \quad \text{tj. Adam vyhrál.}$$

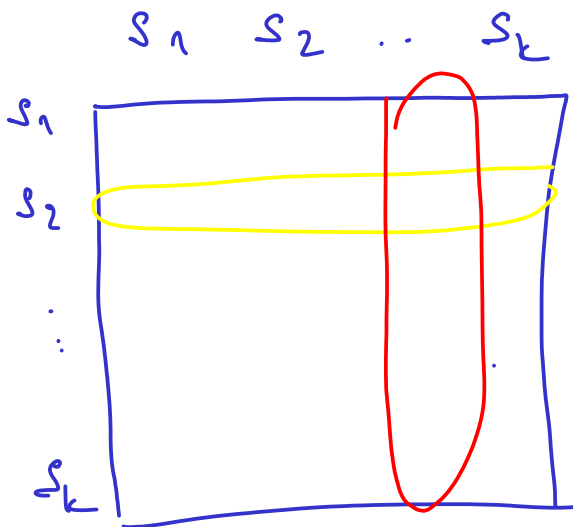
Všimnout si: když bychom jim prostě sčítali

přidělení hlasů, tak Adam a David
dohromady stejně, podobně Bořek a Gwyl.

Střevný problém v jiném obletu:

tenisový klub \rightarrow všechny webové stránky

člen A volí členy... \rightarrow stránka 1 odkazuje na stránky
.....



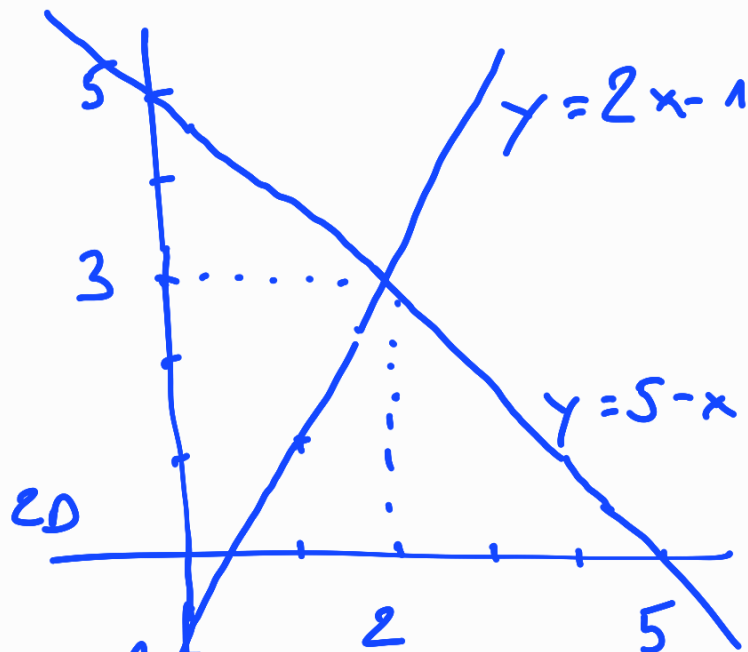
\Rightarrow dostaneme spravedlivou
divizibilitu stránek

tzv. Page Rank algoritmus - Google, 1996

Soustavy lineárních rovnic

Pr. $2x - y = 1$

$$x + y = 5$$



- Jeden pohled
koukám na řádky
rovnice ~ prímky
(rovina 3D
ne rovina 2D)

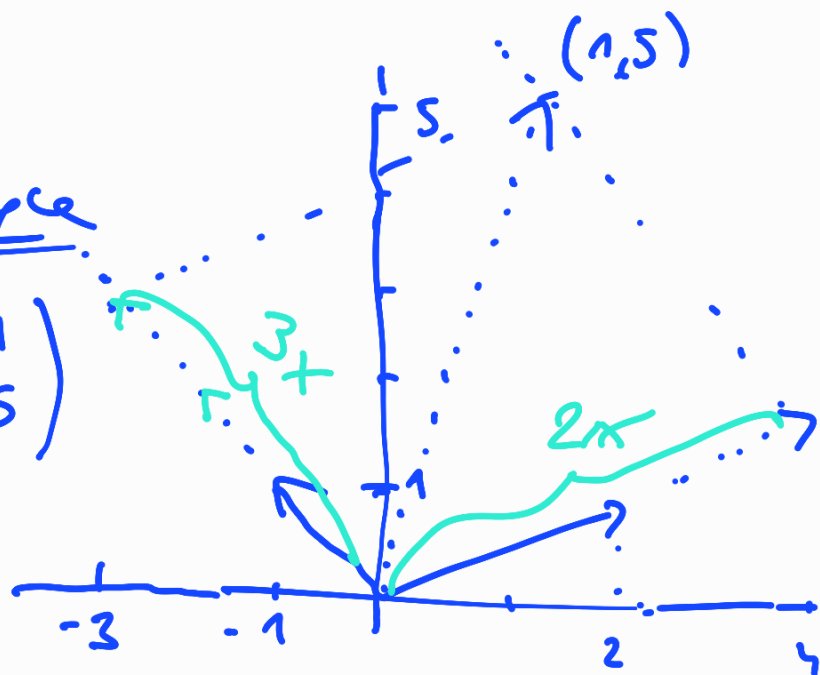
řešení - průnik

průnik (roviny, roviny)

- Druhý pohled

koukám na sloupce

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$



hledáme vektorů $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
tj. v součtu dostaneme $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Definice: Soustava m lineárních rovnic

m neznámých je systém rovnic tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

kde a_{ij} jsou reálná (racionální, komplexní, ...)

čísla, tzv. koefficienty soustavy

b_1, \dots, b_m jsou reálná (...) čísla,

tzv. pravá strana.

x_1, \dots, x_n jsou neznámé

Znacení a terminologie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matic soustavy

(uspořádaná
 $m \times n$ -lice)

a_{ij} .. prvek na řádce i ,
sloupci j

typu $m \times n$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektor pravo
strany

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{vektor} \\ \text{neznámých}$$

Píšeme $Ax = b$.

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

rozšířená matice soustavy

Rěšením soustavy $Ax = b$ je množina
všech vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ reálných (...) čísel
splňujících všech rovnic soustavy.

V našem příkladě je řešení $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Značení: A_{i-} ... i -tý řádek (A_{i*})

A_{-j} ... j -tý sloupec (A_{*j})

ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY

- a) vynásobem i -tého řádku množinou t
- b) přičtem j -tého řádku k i -tému, $i \neq j$

- b) přičtem t -násobku j -tého k i -tému, $i \neq j$
- c) prohozením řádků i a j

☺ úpravy b, c lze provést vhodnou kombinací úprav a, b. Dů.

Plutem: Elementárním řádkovým úpravám rozšířené matice soustavy rovnice množina řešení.

Důkaz: úprava a)

ozn. $S \dots$ množina řešení přední s.
 $R \dots$ úpravy r.

chceme $S = R$.

Uvaž $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in S$.

Paž x splňuje rovnice $1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$
úpravy soustavy.

i -tá: $t \cdot a_{i1} x_1 + t a_{i2} x_2 + \dots + t \cdot a_{in} x_n = t \cdot b_i$

vše: $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i$

$$\Rightarrow S \subseteq R$$

bud' steganá v'zaha ucopal i

nebo si všimneme, že z upravené

soustavy lze získat proceduru

ponocí demont. úpravy a)

$$\Rightarrow R \subseteq S$$

$$S = R.$$

Obdobně pro dem. úpravu b) \square

Schematicky:

původní s.

$$A_1 \cdot x = b_1$$

\vdots

$$A_i \cdot x = b_i$$

\vdots

$$A_j \cdot x = b_j$$

\vdots

$$A_m \cdot x = b_m$$

po úpravě a

\vdots

$$t \cdot A_i \cdot x = t \cdot b_i$$

\vdots

po úpravě b

\vdots

$$tA_i \cdot x + tA_j \cdot x = b_i + b_j$$

\vdots

Dů: Je-li $(A|b)$ rozšířena s. vznikla postupností el. úprav z $(A|b)$, pak existuje posloupnost el. úprav, které převedou $(A|b')$ na $(A|b)$.