Opakování:

LA1 19/11/24

Definice: Vektorový prostor nad tělesem T je množina V s binární operací $+$ a operací $\cdot : T \times V \to V$ splňující axiomy:

1. $(V,+)$ je Abelova grupa
2. $\forall a,b \in T, \forall v \in V: \quad a\cdot(b\cdot v) = (ab)\cdot v$
3. $\forall v \in V: \quad 1\cdot v = v$, kde 1 je jednotkový prvek z T
4. $\forall a,b \in T, \forall v \in V: \quad (a+b)\cdot v = a\cdot v + b\cdot v$
5. $\forall a \in T, \forall u,v \in V: \quad a\cdot(u+v) = a\cdot u + a\cdot v$

Tvrzení (základní vlastnosti VP): Nechť V je VP nad T.

1. $\forall a \in T: \quad a\cdot \vec{0} = \vec{0}$.
2. $\forall u \in V: \quad \underset{\in T}{0}\cdot u = \underset{\in V}{\vec{0}}$
3. $a\cdot u = \vec{0} \iff a = 0^{\in T}$ nebo $u = \vec{0}^{\in V}$

Důkaz: 1. Protože $(V,+)$ je grupa, existuje $y \in V$ tž. $a\cdot\vec{0} + y = \vec{0}$ tj. y je inverzní prvek k $a\cdot\vec{0}$

Tudíž $a\cdot\vec{0} = a\cdot\vec{0} + a\cdot\vec{0} + y = a\cdot(\vec{0}+\vec{0}) + y = a\cdot\vec{0} + y = \vec{0}$

2. Obdobně: $\exists y \in V$ tž. $0\cdot u + y = \vec{0}$

$\Rightarrow 0\cdot u = 0\cdot u + 0\cdot u + y = 0\cdot u + y = \vec{0}$

3. Sporem. Předp. $\exists a \in T, u \in V$ tž. $a\cdot u = \vec{0}$ & $a \neq 0$ & $u \neq \vec{0}$.

Pak $u = 1\cdot u = (a^{-1}\cdot a)\cdot u = a^{-1}\cdot\vec{0} = \vec{0}$ spor. ∎

dle bodu 1

Podprostor U VP $(V,+,\cdot)$ nad T – neprázdná podmnožina V uzavřená na $+$ a $\cdot$

Více: $(U,+,\cdot)$ je také VP nad T. (nutno hlavně ověřit, že $(U,+)$ je grupa.)

lineární kombinace vektorů $v_1, \dots, v_n$ – každý výraz $a_1v_1 + \dots + a_nv_n$, kde $a_i \in T$ ... mohou se opakovat!

Lin. kombinace prázdného systému vektorů je nulový vektor.

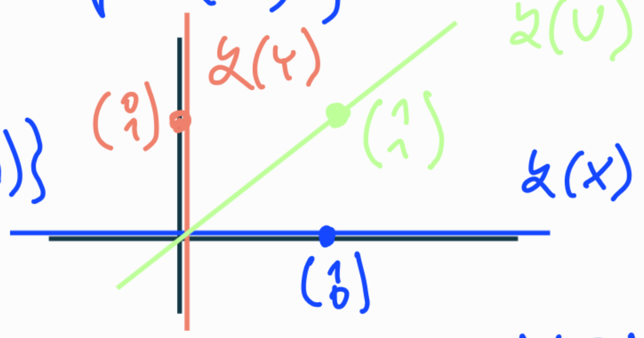
Def: Nechť V je VP nad T a $X \subseteq V$. Pak **lineární obal** X je množina všech lineárních kombinací prvků X, tj. $\mathcal{L}(X) = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k : k \in \mathbb{N}_0, v_1, \dots, v_k \in V, a_1, \dots, a_k \in T\}$.

(Alternativní označení: $\mathrm{span}(X)$).

Př: $V = \mathbb{R}^2$ (nad $\mathbb{R}$)

$X = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $Y = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $U = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$Z = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\mathcal{L}(Z) = \mathbb{R}^2$



Věta: Pro libovolný VP V nad T a libovolnou $X \subseteq V$:
$\mathcal{L}(X)$ je podprostor V.

Důkaz:
- jistě $\vec{o} \in \mathcal{L}(X)$ (protože $\vec{o}$ je LK prázdného souboru) tedy $\mathcal{L}(X) \neq \emptyset$
- každá LK vektorů z V jistě patří do V (operace $+$ a $\cdot$ nemohou vytvořit nic jiného), tedy $\mathcal{L}(X) \subseteq V$
- uzavřenost na $+$ a $\cdot$: uvaž $u, v \in \mathcal{L}(X)$, $t \in T$

Pak $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$, pro nějaká $k \in \mathbb{N}, u_i \in X, a_i \in T$

$v = b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell$, —"— $\ell \in \mathbb{N}, v_i \in X, b_i \in T$

sčítání: $u + v = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + b_1 v_1 + \dots + b_\ell v_\ell$

- tedy $u+v$ je LK $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_\ell$, $u+v \in \mathcal{L}(X)$.

násobení: $t \cdot u = t \cdot (a_1 u_1 + \dots + a_k u_k) \underbrace{=}_{\text{distrib.}} (t \cdot a_1) u_1 + \dots + (t \cdot a_k) u_k$

- tedy $t \cdot u$ je LK $u_1, \dots, u_k$, $t \cdot u \in \mathcal{L}(X)$. ∎

Tvrzení: Nechť U_i, $i \in I$ (…může být nekonečné), jsou podprostory VP V nad T.
Pak $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ je také **podprostor** V.

Důkaz:
- protože $\forall i \in I$, $\vec{o} \in U_i$, máme $\vec{o} \in U$, tj. $U \neq \emptyset$ (neprázdnost)
- $U \subseteq V$ je zřejmé (každé $U_i \subseteq V$)
- uzavřenost: uvaž $u, v \in U$, $t \in T$. Pak $\forall i \in I$, $u, v \in U_i$.

$\Rightarrow$ sčítání: $\forall i \in I$, $u + v \in U_i$ $\Rightarrow$ $u + v \in U$

násobení: $\forall i \in I$, $t \cdot u \in U_i$ $\Rightarrow$ $t \cdot u \in U$ ∎

Tvrzení: Nechť V je VP nad T a $X \subseteq V$. Pak $\mathcal{L}(X)$ je průnik všech podprostorů V obsahujících X.

Smysl: popis $\mathcal{L}(X)$ <u>zvenku</u> (vs. definice - popis <u>zevnitř</u>)

<u>Důkaz</u>: Označme W průnik všech podprostorů V obsahujících X.

chceme ověřit $\mathcal{L}(X) = W$, tj. $\mathcal{L}(X) \subseteq W$ a $W \subseteq \mathcal{L}(X)$.

- z předešlého tvrzení víme, že W je podprostor.

  viz definice W

  Protože $X \subseteq W$, a W je uzavřená: $\mathcal{L}(X) \subseteq W$.
- z předešlé věty víme, že $\mathcal{L}(X)$ je podprostor V, navíc $X \subseteq \mathcal{L}(X) \Rightarrow \mathcal{L}(X)$ je jedním z podprostorů, jejichž průnikem je W, proto $W \subseteq \mathcal{L}(X)$. ∎

<u>Def</u>: **Soubor** (konečná posloupnost) vektorů $v_1, \dots, v_n$ je <u>lineárně nezávislý</u>, pokud z rovnosti $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = \vec{o}$ plyne $a_1 = \dots = a_n = 0$ $(\in T)$.

tj. $\vec{o}$ lze získat z $v_1, \dots, v_n$ pouze <u>triviální</u> LK.

<u>Pozn</u>:
- pokud $v_i = v_j$ pro nějaké $i \neq j$, $\Rightarrow$ LZ
- pokud $v_i = \vec{o}$ pro nějaké i, $\Rightarrow$ LZ
- Gaussova eliminace: nulový řádek $\Rightarrow$ původní řádky LZ

<u>Pozorování</u>: Jsou-li $v_1, \dots, v_n$ LZ, pak $\exists\, i \in \{1, \dots, n\}$ a koeficienty $b_j \in T$, $j \neq i$ tž. $v_i = \sum_{j \neq i} b_j \cdot v_j$.

<u>Důkaz</u>: Máme $\sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \vec{o}$ a i tž. $a_i \neq 0$.

Přičteme $\left(-\sum_{j \neq i} a_j v_j\right)$ na obě strany: $a_i v_i = -\sum_{j \neq i} a_j v_j$

Vynásobíme (a_i^{-1}): $v_i = -\sum_{j \neq i} (a_i^{-1} \cdot a_j) \cdot v_j$ ∎

Zřejmě platí i naopak $\Rightarrow$

Tvrzení: Soubor $v_1, \dots, v_n$ je LN $\Leftrightarrow \forall i$, $v_i \notin \mathcal{L}(\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\})$.

PODPROSTORY URČENÉ MATICÍ

Def: K matici A typu $m \times n$ s prvky z tělesa T definujeme následující podprostory:

1. sloupcový prostor A: $\mathcal{S}(A) = \mathcal{L}(\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\})$
2. řádkový prostor A: $\check{R}(A) = \mathcal{S}(A^T)$
3. jádro matice A: $\ker(A) = \{x \in T^n : Ax = 0\}$
4. jádro matice A^T: $\ker(A^T)$

Pozn: už jsme si dříve všimli, že $\ker(A)$ je podprostor.

Tvrzení: Násobení A regulární maticí zleva nemění $\check{R}(A)$ ani $\ker(A)$.

Důkaz: A ... typu $m \times n$, R ... regulární, $m \times m$

všimněme si: každý řádek $R \cdot A$ je LK řádků A

$\Rightarrow$ lin. obal řádků $R \cdot A$ $\subseteq$ lin. obal řádků A,

tj. $\check{R}(R \cdot A) \subseteq \check{R}(A)$.

Dále: $A = R^{-1} \underbrace{R \cdot A}$, R^{-1} je regulární

$\Rightarrow$ ze stejného důvodu aplikovaného na $R^{-1}(RA)$

dostaneme: $\check{R}(A) = \check{R}(R^{-1} R \cdot A) \subseteq \check{R}(R \cdot A)$

$\Rightarrow \check{R}(A) = \check{R}(R \cdot A)$. $\quad \subseteq \; \supseteq$

Jádro: chceme ověřit $\ker(A) = \ker(R \cdot A)$

uvaž $x \in \ker(A)$. Pak $Ax = 0 \Rightarrow R \cdot A x = R \cdot 0 = 0$,

tj. $x \in \ker(R \cdot A)$

Naopak: $x \in \ker(R \cdot A)$ znamená $RAx = 0$.

Pak $Ax = R^{-1} R A x = R^{-1} 0 = 0$ tj. $x \in \ker(A)$. ■

Důsledek: Elementární ŘÚ nemění $\check{R}(A)$ ani $\ker(A)$.

7/4

Def: Soubor (konečná posloupnost) vektorů B z VP V se nazývá **systém generátorů V**, pokud $\mathcal{L}(B) = V$.

Lineárně nezávislý systém generátorů VP V se nazývá **báze VP V**.

Př: • $e_1, e_2, \ldots, e_n$ je báze $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{R}$), kde $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-tá složka

Existuje báze pro každý VP?

Tvrzení: Nechť V je VP a X je soubor vektorů z V t. ž.

i) $\mathcal{L}(X) = V$ — minimální SG

ii) $\forall v \in X$, $\mathcal{L}(X \setminus \{v\}) \neq V$

Pak X je báze VP V.

Důkaz: Stačí ověřit LN.

Vlastnost ii) implikuje: $\forall v \in X$: $v \notin \mathcal{L}(X \setminus \{v\})$, což podle minulého tvrzení znamená X je LN. ∎

Důsledek: Z každého konečného SG lze vybrat bázi.