Opakování – řešení soustav lin. rovnic

LA1 15/10/24

Věta: Pro $(A'|b')$ v odstup. tvaru platí:

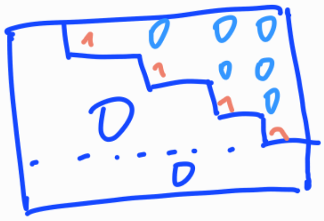
- je-li ve sloupci b' pivot, pak žádné řešení! $\mathrm{rank}(A') < \mathrm{rank}(A'|b')$
- je-li v každém sloupci A' pivot a žádný v b', pak právě jedno řešení! $\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank}(A'|b') = n$
- má-li A' sloupec bez pivotu a žádný pivot v b', pak pro každé nastavení volných proměnných právě jedno řešení! $\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank}(A'|b') < n$

Důsledek: jednoznačnost pozice pivotů (tudíž i počtu pivotů)

Def: **Hodnost matice** A: $\mathrm{rank}(A)$ – počet pivotů v A' v odst. tvaru vzniklé z A EŘÚ.

Def: **Redukovaný** odst. tvar:

navíc: i) pivoty $= 1$
ii) nad pivoty samé 0



převod do reduk. odst. tvaru –
– obdobný jako převod do odst. tvaru –
– pomocí EŘÚ, od posledního pivotu
→ tzv. **Gauss-Jordanova eliminace**

Def: **Homogenní soustava**: $Ax = 0$

Pozorování: Buď x_0 fixní řešení $Ax = b$.
Pak pro každé řešení x' soustavy $Ax = 0$, $A(x_0 + x') = b$,
a pro každé řešení $\bar{x}$ soustavy $Ax = b$, $A(\bar{x} - x_0) = 0$.

SMYSL: zobrazení $g(x) = x + x_0$ je **bijekce** mezi řešeními $Ax = 0$ a $Ax = b$.

3/17

POČÍTÁNÍ S MATICEMI

Def: Reálná **matice typu $m \times n$** je uspořádaná $(m \cdot n)$-tice reálných čísel

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i-tý **řádek**: $a_{i1} \cdots a_{in}$ $\quad A_{i*}$

j-tý **sloupec**: $\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$ $\quad A_{*j}$

průnik v řádku i a sloupci j: a_{ij} nebo A_{ij}

Def: reálný n-rozměrný

sloupcový vektor: matice typu $n \times 1$

řádkový vektor: matice typu $1 \times n$

Def: **nulová matice** (typu $m \times n$) - značí 0

součet matic A, B typu $m \times n$, $A+B$, je matice C typu $m \times n$ tž. $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ $\forall i, j$

t-násobek matice A, pro $t \in \mathbb{R}$, je matice D, $t \cdot A$, stejného typu tž. $D_{ij} = t \cdot A_{ij}$, $\forall i, j$

rovnost matic A, B stejného typu se rovnají, $A = B$, pokud $A_{ij} = B_{ij}$, $\forall i, j$

Tvrzení (vlastnosti součtu a násobku matic)

Pro matice $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a čísla $s, t \in \mathbb{R}$ platí:

1. $A + B = B + A$ komutativita
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ asociativita
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$, kde $-A = (-1) \cdot A$
5. $s \cdot (t \cdot A) = (s \cdot t) \cdot A$
6. $s(A + B) = s \cdot A + s \cdot B$
7. $(s + t) \cdot A = s \cdot A + t \cdot A$

$\left.\begin{matrix} 6. \\ 7. \end{matrix}\right\}$ distributivita

Důkaz: část 1. Chceme ověřit, že $\forall i,j$,

$$\begin{array}{ccc} (A+B)_{ij} & \overset{?}{=} & (B+A)_{ij} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ A_{ij}+B_{ij} & = & B_{ij}+A_{ij} \end{array}$$

← definice sčítání matic

↑ komutativita sčítání reálných čísel

ostatní obdobné - rozmyslete si. $\square$

Definice: **Binární operace** na množině T je zobrazení z $T \times T$ do T.

Konvence: pro binární operaci $\oplus : T \times T \to T$ a $x, y \in T$ píšeme: $x \oplus y$ místo $\oplus(x,y)$.

Př: $+, \cdot$ je binární operace na $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$

$-$ —— " —— na $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$, $\cancel{\mathbb{N}}$

$:$ —— " —— na $\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$+$ na množině reálných matic $m \times n$

Definice: **Grupa** je dvojice $(G, \oplus)$, kde G je množina a $\oplus$ je binární operace na G, splňující následující axiomy:

1. $\forall a,b,c \in G : (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ **asoc.**
2. $\exists n \in G \ \forall a \in G : a \oplus n = n \oplus a = a$ **neutrální prvek**
3. $\forall a \in G \ \exists b \in G : a \oplus b = b \oplus a = n$ **inverzní prvek**

Pokud navíc platí:

4. $\forall a,b \in G : a \oplus b = b \oplus a$ **komutativita**

je G **Abelova** (komutativní) grupa

Příklady: • $(\mathbb{R},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{Z},+), (\mathbb{C},+)$ $\cancel{(\mathbb{N},+)}$

• $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ grupy reálných matic $m \times n$

• $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$

Konečné příklady:

• $(\{n\}, +)$ – nejmenší grupa

• $(\{0,1\}, +)$ kde

+	0	1
0	0	1
1	1	0

• $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ kde $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$a \oplus b = \underbrace{a + b \bmod n}_{\text{tj. zbytek po dělení } n}$$

↑ vše jsou Abelovy grupy

Pozor: nová úroveň abstrakce!

1) počítání s reálnými čísly

2) ⇝ počítání s písmeny zastupujícími reálná čísla

3) ⇝ počítání s prvky libovolné struktury určitých vlastností – axiomy

axiomy ~ rozhraní (k větám, ...)

Illustrace: při zpětné substituci navazujeme na

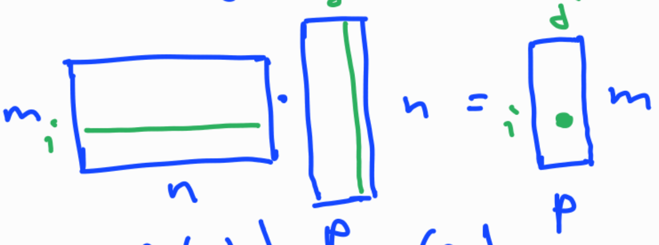
$x + 3 = 5$. Co s tím?

1. $(x+3)+(-3) = 5+(-3)$ přičteme opačný prvek ke 3 – axiom 3
2. $x + (3+(-3)) = 5+(-3)$ přezávorkujeme – axiom 1
3. $x + (0) = 2$ využij vlastnosti op. prvku
4. $x = 2$ axiom 2 – vlastnosti nulového prvku

zpět k POČÍTÁNÍ S MATICEMI

Def: Je-li A matice typu $m \times n$ a B matice typu $n \times p$, pak **součin matic A, B**, ozn. $A \cdot B$, je matice C typu $m \times p$

t.ž. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$



Př. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Def: **Transponovaná matice** k matici A typu $m \times n$ je matice A^T typu $n \times m$ t.ž. $A^T_{ji} = A_{ij}$, $\forall i, j$.

Př. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Def: **Jednotková matice řádu n** je matice I_n typu $n \times n$ t.ž. $(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I_3$

Teorém (vlastnosti násobení matic): Za předpokladu, že všechny součty a součiny matic jsou definovány, platí:

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ asociativita násobení
2. $A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ } distributivita
3. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ Pozor: **není** komutativní!
5. $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

Def: • Matice B je **inverzní** k matici A typu $n \times n$, pokud $A \cdot B = I_n$. Pokud existuje, značíme A^{-1}.

• Matice A typu $n \times n$ je **regulární**, pokud $\mathrm{rank}(A) = n$, jinak je **singulární**.

Věta: Matice A má inverzní matici $\iff$ A je regulární. V takovém případě je A^{-1} určena jednoznačně a platí též $A^{-1} \cdot A = I$.

Důkaz: ⇐ A je regulární; ozn. $e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i-tá složka

Pak $\forall i = 1, \dots, n$, soustava $Ax = e_i$ má právě jedno řešení – podle věty o řešení soustav lin. rov. – označme ho x^i.

Proto $A \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ x^1 & \cdots & x^n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \cdots & e_n \\ | & & | \end{pmatrix} = I_n$, tj. $\exists A^{-1}$, a je jednoznačná.

⇒ sporem. Předpokládejme $\operatorname{rank}(A) < n$.

Nechť $(A' | B)$ je odstupňovaný tvar $(A | I)$.

Pak poslední řádek A' je nulový ($\operatorname{rank} < n$)

B nenulový ($\operatorname{rank} = n$)

Označme i index tž. $B_{mi} \neq 0$ a řešme $Ax = e_i$.

Dle našeho předpokladu nemá řešení (podle věty o řešení soustav), ale i-tý sloupec A^{-1} je řešení.

SPOR.

Zbývá dokázat $A^{-1} \cdot A = I$.

1. ukážeme $\operatorname{rank}(A^{-1}) = n$. Buď x libovolné řešení soustavy $A^{-1}x = 0$. Pak $x = I \cdot x = (A \cdot A^{-1})x = A \cdot 0 = 0$ – tj. jediné řešení → A^{-1} je regulární, má inverzi.
2. $(A^{-1})^{-1} \overset{!}{=} I \cdot (A^{-1})^{-1} = (A \cdot A^{-1}) \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot \underbrace{(A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1})}_{=I} = A$ ∎

Důkaz tvrzení – část 1. $(AB)C = A(BC)$

$A \dots m \times n$, $B \dots n \times p$, $C \dots p \times q$

$$((A \cdot B) \cdot C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (A \cdot B)_{ik} \cdot C_{kj} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{l=1}^{n} (A_{il} \cdot B_{lk}) \cdot C_{kj} =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{il} \cdot B_{lk} \cdot C_{kj} = \sum_{l=1}^{n} A_{il} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{p} B_{lk} \cdot C_{kj}}_{(B \cdot C)_{lj}}$$

$$= (A(BC))_{ij}$$

Ostatní obdobně. ∎