SOUSTAVY LIN. ROVNIC

Opakování: $Ax = b$

ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY ERÚ

a) vynásobení i-tého řádku nenulovým t $\otimes_i^t$

b) přičtení j-tého řádku k i-tému, $i \neq j$ $\oplus_{ij}$

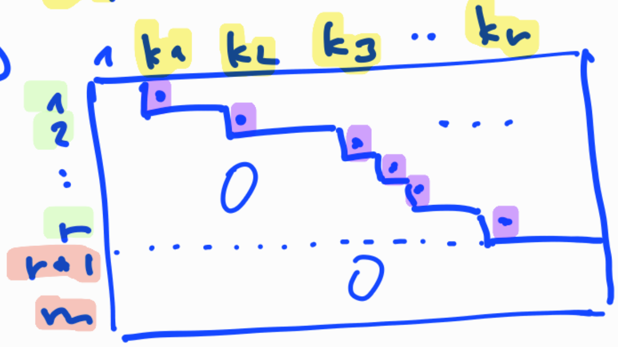
$\oplus_{ij}^t$ $\circledS_{ij}$

Už víme: Elementární řádkové úpravy rozšířené matice soustavy nemění množinu řešení.

Def. Matice A je v odstupňovaném tvaru pokud $\exists\, r \in \{0,1,\dots,m\}$ tž. i) řádky $r+1,\dots,m$ jsou celé nulové

ii) řádky $1,\dots,r$ jsou nenulové a $k_1 < k_2 < \dots < k_r$

kde $k_i = \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$



pivoty - prvky na pozicích $(1,k_1),(2,k_2)\dots(r,k_r)$

sloupce $k_1,k_2,\dots,k_r$ - bázické

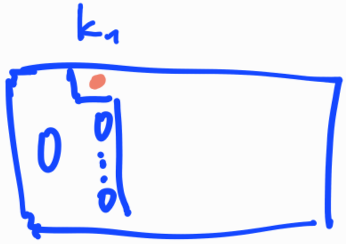
ostatní - nebázické (=volné)

Převedení matice A do odstupňovaného tvaru:

1. najdi první nenulový sloupec - index k_1.
   Pokud neexistuje, konec ($A \equiv 0$).
2. pokud $a_{1k_1} = 0$, prohoď první řádek s libovolným řádkem i tž. $a_{ik_1} \neq 0$.
3. pro $i = 2,3,\dots,m$ přičti $\left(-\frac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}}\right)$ násobek řádku 1 k řádku i.
4. pokud $m \geq 2$, aplikuj celý postup na matici bez 1. řádku, jinak konec.

po 2. kroku: $a_{1k_1} \neq 0$

po 3. kroku: $a_{2k_1} = a_{3k_1} = \dots = a_{mk_1} = 0$



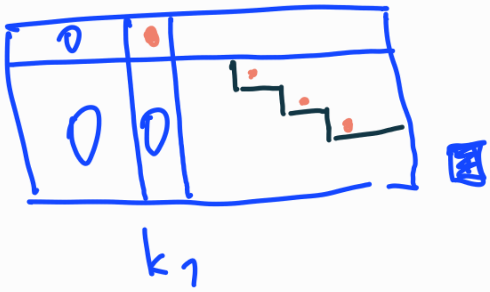
Všimněme si: - algoritmus skončí (ubývají řádky)

Tvrzení: Algoritmus převede A do odstup. tvaru.

Důkaz: indukcí podle počtu řádků matice A

- jediný řádek – A je vždy v odst. tvaru:
  - buď $r = 0$ a $A = 0\ 0 \dots 0$
  - nebo $r = 1$ a někde má A v řádku nenulu.
- $m > 1$ řádků:
  - Díky víme, že volání alg. v kroku 4 už neprovede žádnou změnu se sloupci $1, 2, \dots, k_1$
  - Díky indukt. předpokladu víme, že alg. upraví podmatici tvořenou řádky $2, \dots, m$ do odst. tvaru, a že první nenulový sloupec má index $> k_1$

→ Celá matice je v odstup. tvaru



Příklad:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\ \circlearrowleft\, {}^1_2\ } \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\ \oplus\, {}^3_1\ } \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\ \oplus\, {}^{3}_{-\frac{1}{3}2}\ } \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

$r = 3 \quad k_1 = 1 \quad k_2 = 2 \quad k_3 = 4$

Věta (Řešení soustavy lineárních rovnic)

Nechť $(A'|b')$ je matice v odstup. tvaru vzniklá pomocí ERÚ z matice $(A|b)$. Pak platí:

1. Je-li nějaké b'_i pivotem $(A'|b')$, pak soustava $Ax=b$ nemá žádné řešení.
2. Není-li žádné b'_i pivotem $(A'|b')$, pak
   a) pokud každý sloupec A' obsahuje pivota, pak $Ax=b$ má právě jedno řešení,
   b) pokud nějaký sloupec A' neobsahuje pivota, pak $Ax=b$ má nekonečně mnoho řešení.
   Navíc pro každé nastavení volných (nebázických) proměnných existuje právě jedno nastavení bázických proměnných tak, aby $Ax=b$.

Důkaz: 1. řádek i v matici $(A'|b')$ má tvar

$$\underbrace{0\cdot x_1 + \dots + 0x_n}_{=0} = b'_i \neq 0$$

, což nesplňuje žádné x

$$\Rightarrow A'x=b' \text{ nemá řešení} \overset{\text{vlastnosti ERÚ}}{\Longrightarrow} Ax=b \text{ nemá řešení}$$

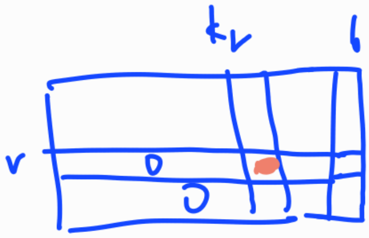
2. a) indukcí pro $i=n, n-1, \dots, 1$ dokážeme:
hodnoty proměnných $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ jsou jednoznačně dány rovnicemi $i, i+1, \dots, n$.
všimni si: pivoty na pozicích (i,i).

- $i=n$: n-tá rovnice: $\underbrace{0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_{n-1}}_{=0} + \overset{\text{pivot } \neq 0}{a'_{nn}} x_n = b'_n$
  $\Rightarrow x_n = \dfrac{b'_n}{a'_{nn}}$
- indukční krok: $i+1 \longrightarrow i$
  i-tá rovnice:
  jednoznačně určeny dle ind. předpok.
  $$\underbrace{0x_1 + \dots + 0x_{i-1}}_{=0} + \overset{\text{pivot } \neq 0}{a'_{ii}} x_i + \underbrace{a'_{i\,i+1} x_{i+1} + \dots + a'_{in} x_n}_{=\Delta} = b'_i$$
  $\Rightarrow x_i = \dfrac{b'_i - \Delta}{a'_{ii}}$ tj. x_i jednoznačně dáno.

b) Označme r počet pivotů matice A'

indukcí pro $i = r, \dots, 1$ dokážeme:

pro libovolné hodnoty volných prom. x_j s indexem $j > k_i$ jsou hodnoty proměnných $x_{k_i}, \dots, x_{k_r}$ jednoznačně dány, pokud splňují rovnice $i, i+1, \dots, r$.



• $i = r$: r-tá rovnice:

jen volné prom.

pivot $\neq 0$

$$\underbrace{a'_{rk_r} \cdot x_{k_r} + \sum_{j=k_r+1}^{n} a'_{rj} \cdot x_j = b'_r}$$

pro každou volbu volných prom. x_j, $j > k_r$, je hodnota x_{k_r} jednoznačně dána.

• indukční krok: $i+1 \to i$

i-tá rovnice:

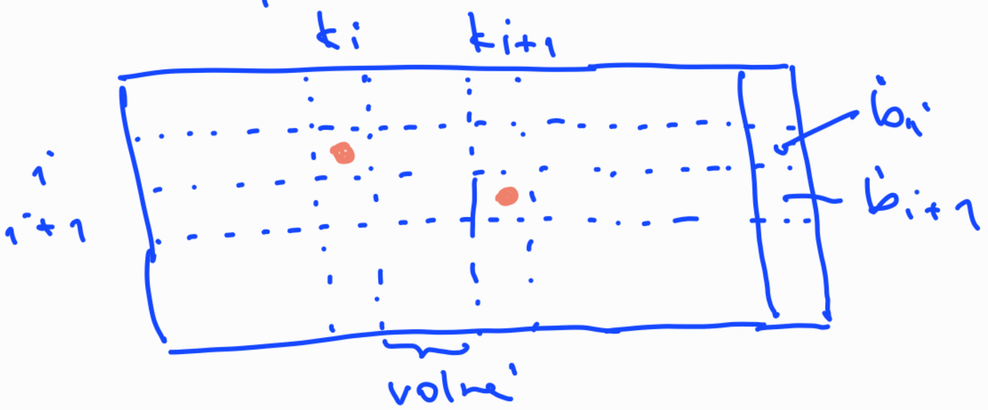
pouze volné prom.

podle ind. předp. všechny bázické proměnné jsou jednoznačně dány

pivot $\neq 0$

$$\underbrace{a'_{ik_i} \cdot x_{k_i} + \overbrace{\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}-1} a'_{ij} \cdot x_j} + \overbrace{\sum_{j=k_{i+1}}^{n} a'_{ij} \cdot x_j} = b'_i}$$

bázické x_{k_i} jednoznačně určíme ∎



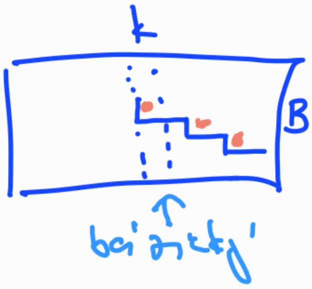
Pozn.:
výpočet bázických proměnných tímto způsobem (odzadu) se říká zpětná substituce.

Důsledek (jednoznačnost pozic pivotů):

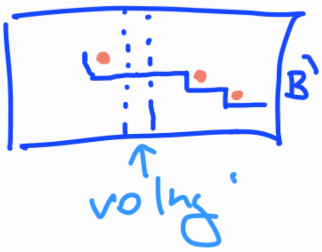
Je-li A libovolná matice a B matice v odstupňovaném tvaru vzniklá z A posloupností EŘÚ, pak pozice pivotů jsou jednoznačně určeny.

Důkaz: sporem.

Předpokládejme, že existují matice A, B, B' tž.
- B i B' jsou získané z A pomocí EŘÚ,
- B i B' jsou v odstup. tvaru
- pozice pivotů v B a B' se liší.



Nechť k je největší index tž.
- pro každé $j > k$ je typ sloupce v B a B' stejný,
- sloupec k je bázický v B (bůno),
- sloupec k je volný v B'



Uvažme soustavy $Ax=0$, $Bx=0$ a $B'x=0$.
všechny mají stejná řešení (protože EŘÚ je nemění)

Podle předešlé věty

pro $Bx=0$ je hodnota x_k dána jednoznačně (volbou volných prom. x_j, $j > k$)

pro $B'x=0$ lze hodnotu x_k nastavit libovolně

$\Rightarrow$ spor – byla by různá řešení $Bx=0$ a $B'x=0$

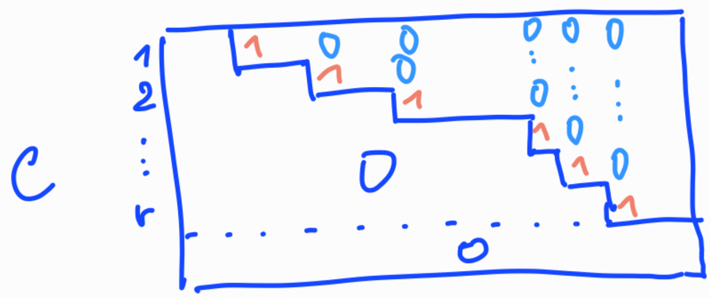
$\Rightarrow$ platí tvrzení věty. ■

Definice: Hodnost matice A, značená $\text{rank}(A)$, je počet pivotů v libovolné matici v odstup. tvaru získané z A posloupností ERÚ.

Pozn. díky předešlému Důsledku je smysluplná (protože jednoznačně určuje $\text{rank}(A)$)

Definice: Matice C s m řádky je v redukovaném odstupňovaném tvaru, pokud je v odstupňovaném tvaru a navíc: 1) každý pivot je 1 (tj. $\forall i, c_{ik_i} = 1$)

2) v každém bázickém sloupci je jediný nenulový prvek, totiž pivot



Pozn. Převod do redukovaného odstup. tvaru z odstupňovaného tvaru lze udělat podobným postupem, jako převod do odst. tvaru.

Postupujeme odzadu od sloupce k_r až ke k_1.

Rozmyslet si: