ÚVOD

LA1 1/10/24

matematika (LA) - krása & užitečnost

LA užitečná pro

- grafika a počítačové vidění
- kryptografie a kódování
- Optimalizace
- zpracování dat
- umělá inteligence (strojové učení)
- bioinformatika

krása snad bude vidět

Označení se

- Nejen otázky CO? JAK? ale hlavně PROČ?
- Intuice i preciznost
- naše role: já se snažím vysvětlit
  vy se musíte naučit
- pomocné nástroje: poznámky k přednášce
  pište si, počítejte
  konzultace - cvičící, já
  matematické dovednosti
  studentští průvodci
- nezapomeňte: Vaše hodnota není v tom,
  jak dobře studujete
  (ale snažte se co nejlépe)

NEDEMOKRATICKÉ VOLBY – motivační příklad

tenisový klub volí předsedu. **Pravidla:**

- každý člen má jeden rovnoměrně dělitelný hlas

Např. členové Adam, Bára, Cyril, Dana

Adam volí $v_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ Bára $v_B = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ Cyril $v_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ Dana $v_D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zápis do tabulky:

sloupce – jak kdo volí

řádky – jak je kdo volen

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- **výsledek** – čtveřice $H = (h_A, h_B, h_C, h_D)$ t.ž.

(skalární) součin řádku i a H = i-tá složka H

tj. $0 \cdot h_A + \frac{1}{2} h_B + 0 \cdot h_C + 1 \cdot h_D = h_A$

$0 \cdot h_A + 0 \cdot h_B + \frac{1}{2} h_C + 0 \cdot h_D = h_B$

⋮

- **vítězem** je člen s největší hodnotou h

- **INTERPRETACE:** h_A je důležitost člena A; závisí na důležitosti a počtu těch, kdo ho volí, a míře, s jakou ho volí

Vyjde: $H = \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, 1\right)$, tj. vyhrál Adam

---

stejný problém v jiné řeči – Page Rank – Google 1996

~ vlastní čísla, vlastní vektory

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Př. $2x - y = 1$
$x + y = 5$

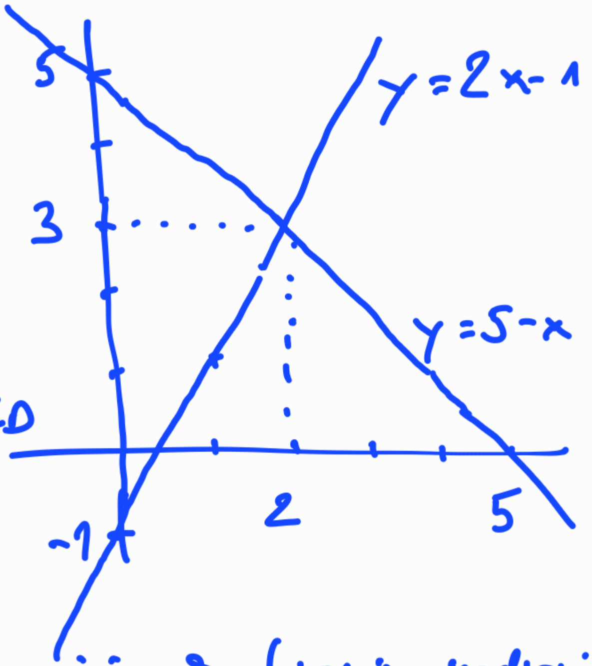
- Jeden pohled

koukám na řádky

rovnice ~ přímka 2D

(rovina 3D

nadrovina nD)

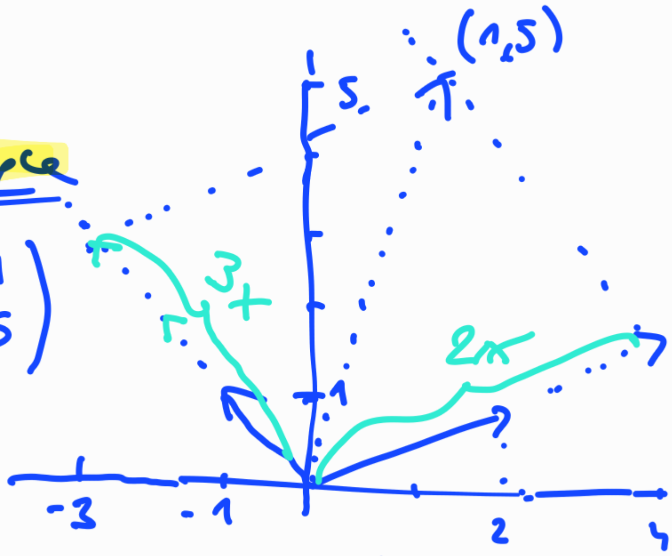


řešení – průnik přímek (rovin, nadrovin)

- Druhý pohled

koukám na sloupce

$$x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$



hledáme násobky vektorů $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

tj. v součtu dostaneme $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

Definice: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých je systém rovnic tvaru

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

kde a_{ij} jsou reálná (racionální, komplex. ...) čísla, tzv. koeficienty soustavy $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

$b_1,\dots,b_m$ jsou reálná (...) čísla, tzv. pravá strana.

$x_1,\dots,x_n$ jsou neznámé

Značení a terminologie:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matice soustavy (uspořádaná $m\cdot n$-tice) typu $m \times n$

a_{ij} .. prvek na řádku i, sloupci j

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ vektor pravých stran

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ vektor neznámých

Píšeme $Ax = b$.

rozšířená matice soustavy

$$(A\,|\,b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy $Ax=b$ je množina všech vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ reálných (...) čísel splňující všech m rovnic soustavy.

V našem příkladu je řešením $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

Značení: A_{i-} ... i-tý řádek (A_{i*})

A_{-j} ... j-tý sloupec (A_{*j})

ELEMENTÁRNÍ ŘÁDKOVÉ ÚPRAVY

a) vynásobení i-tého řádku nenulovým t

b) přičtení j-tého řádku k i-tému, $i \neq j$

b') přičtení t-násobku j-tého k i-tému, $i \neq j$

c) prohození řádku i a j

☼ úpravy b', c lze provést vhodnou kombinací úprav a, b. DÚ. - ROZMYSLETE SI

Tvrzení: Elementární řádkové úpravy rozšířené matice soustavy nemění množinu řešení.

Důkaz: úprava a)

ozn. S ... množina řešení původní s.

R ... upravené s.

chceme $S = R$.

Uvaž $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in S$.

Pak x splňuje rovnice $1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$ upravené soustavy (nezměnily se)

i-tá: $t \cdot a_{i1} x_1 + t\, a_{i2} x_2 + \dots + t \cdot a_{in} x_n \overset{?}{=} t \cdot b_i$ ✓

víme: $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i$

$\Rightarrow S \subseteq R$

Protože z upravené soustavy lze získat původní vynásobením i-tého řádku $\frac{1}{t} \neq 0$, dostáváme též $R \subseteq S$ $\Rightarrow$ $R = S$

úprava b) - obdobně. ⊠

DÚ: Jestli $(A'|b')$ rozšířená s. vznikla posloupností el. ř. úprav z $(A|b)$, pak existuje posloupnost el. ř. úprav, které převedou $(A'|b')$ na $(A|b)$.

Schematicky:

původní s.	po úpravě a	po úpravě b
$A_{1-}x = b_1$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		
$A_{i-}x = b_i$	$t \cdot A_{i-}x = t \cdot b_i$	$tA_{i-}x + t \cdot A_{j-}x = b_i + b_j$
$\vdots$		
$A_{j-}x = b_j$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		
$A_{m-}x = b_m$		

GAUSSOVA ELIMINACE

Vstup: $(A \mid b)$ Hledáme řešení $Ax = b$

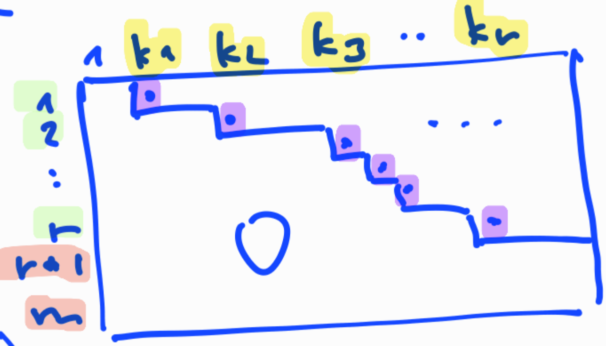
Dvě fáze: JAK? CO TO JE?

1. převede $(A \mid b)$ el. ř. úpravami na matici v tzv. odstupňovaném tvaru
2. zpětnou substitucí nalezne všechna řešení

Def. Matice A je v odstupňovaném tvaru pokud existuje číslo $r \in \{0, 1, \dots, m\}$ t.ž.

- řádky $r+1, \dots, m$ jsou celé nulové
- řádky $1, \dots, r$ jsou nenulové a $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ kde

$$k_i = \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$$



pivoty - prvky na pozicích $(1, k_1), (2, k_2), \dots (r, k_r)$

sloupce s indexy $k_1, k_2, \dots, k_r$ jsou bázické

ostatní sloupce jsou nebázické (= volné)

Algoritmus na převedení A do odstup. tvaru

1. najdi první nenulový sloupec - index k_1.
   Pokud neexistuje, konec - A je celá nulová a tedy v odstupňovaném tvaru.

2. pokud $a_{1k_1} = 0$, prohoď první řádek s libovolným řádkem i t.ž. $a_{ik_1} \neq 0$.

3. pro $i = 2, 3, \dots, m$ přičti $\left(-\frac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}}\right)$ násobek řádku 1 k řádku i.

4. Aplikuj celý postup na matici bez prvního řádku.

po 2. kroku: $a_{1k_1} \neq 0$

po 3. kroku: $a_{2k_1} = a_{3k_1} = \dots = a_{mk_1} = 0$