Optimaliční metody, 9. cvičení http://kam.mff.cuni.cz/˜knop/vyuka/optimed/

Příklad 1. Nalezněte duální úlohy k následujícím úlohám LP:

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximalizuj} & x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\
\text{pro} & x_2 \leq 0, x_4 \geq 0 \\
\text{za podmínek} & \begin{array}{lcl} x_2 - 6x_3 + x_4 & \leq & 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = & 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 & \geq & 5 \end{array}
\end{array}
$$

Příklad 2. Vyřešte primární i duální úlohy:

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximalizuj} & f \\
\text{pro} & x_1, x_2 \geq 0 \\
\text{za podmínek} & \begin{array}{lcl} y & \leq & 4 \\ x & \leq & 4 \\ 3x + 2y & \leq & 7 \end{array}
\end{array}
$$

pro funkce

(a) $f = x + y$,

(b) $f = 3x + 2y$.

Příklad 3. Sestavte celočíselný lineární program pro nalezení minimální dominující množiy v grafu. Nalezněte duální úlohu k relaxované úloze dominující množiny.

Příklad 4.

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximalizuj} & 8a + 5b + 4d + 7.2e + f \\
\text{pro} & a, b, c, d, e, f \leq 0 \\
\text{za podmínek} & \begin{array}{lcl} a - c - \frac{3}{2}d + 0.4e + \frac{1}{2}f & \leq & -1 \\ b + 4c + d + e - f & \leq & -1 \end{array}
\end{array}
$$

Příklad 5. Nechť $P = \{x;\ Ax \leq b\}$ je mnohostěn a $A'x \leq b'$ je podsystém $Ax \leq b$. Pak množinu $\{x;\ Ax \leq b,\ A'x = b'\}$ nazveme stěnou. Před měsícem jsme dokázali, že pro každou vlastní stěnu S mnohostěnu P existuje nadrovina $w^T x = t$ taková, že $P \subseteq \left\{x;\ w^T x \leq t\right\}$ a $S = P \cap \left\{x;\ w^T x = t\right\}$. Ukažte, že platí i opačná implikace. Tedy jestliže máme nadrovinu $w^T x = t$ takovou, že $P \subseteq \left\{x;\ w^T x \leq t\right\}$ a $S = P \cap \left\{x;\ w^T x = t\right\} \neq \emptyset$, pak S je stěna, tj. existuje podsystém $A'x \leq b'$ takový, že $S = \{x;\ Ax \leq b,\ A'x = b'\}$.

Definice 1. Matice A typu $n \times m$ je totálně unimodulární, pokud determinant každé její submatice typu $k \times k$ roven -1, 0 nebo 1 pro všechna $1 \leq k \leq \min\{n, m\}$.
Matice A typu $n \times m$ je unimodulární, pokud je plné řádkové hodnosti, celočíselná a determinant každé její submatice typu $n \times n$ roven -1, 0 nebo 1.

Příklad 6. Dokažte, že totálně unimodulární matice může obsahovat jen prvky 0, 1 nebo -1.
Dokažte, že totálně unimodulární matice s plné řádkové hodnosti je unimodulární.

Příklad 7. Proč je v definici unimodularity požadavek na plnou řádkovou hodnost?
Je každá matici plné řádkové hodnosti, jejíž determinant každé její submatice typu $n \times n$ roven -1, 0 nebo 1, nutně celočíselná?

Příklad 8. Buď A totálně unimodulární matice tvaru $m \times n$. Ukažte, že A^T, $\binom{A}{-A}$ a $(A|I)$ jsou totálně unimodulární matice. Platí analogická tvrzení o unimodularitě?

Příklad 9. Matice A je totálně unimodulární právě tehdy, když matice $(A|I)$ je unimodulární.

Příklad 10. Nalezněte celočíselny mnohostěn $\{x;\ Ax \leq b, x \geq 0\}$, kde A a b jsou celočíselné, ale A není totálně unimodulární. Může navíc A obsahovat pouze prvky -1, 0 a 1? A co když zakážeme i -1?
Pro Vámi nalezenou matici A najděte jiný vektor b takový, že mnohostěn nebude celočíselný.

Příklad 11. Dokažte, že matice incidence grafu je totálně unimodulární právě tehdy, když graf je bipartitní.

Příklad 12. Buď A totálně unimodulární matice plné řádkové hodnosti tvaru $m \times n$ a B báze matice A (tj. čtvercová regulární podmatice matice A tvaru $m \times m$). Ukažte, že $B^{-1}A$ je totálně unimodulární.

Příklad 13. Na přednášce bylo dokázáno, že matice A je unimodulární právě tehdy, když mnohostěn $\{x;\ Ax = b, x \geq 0\}$ je celočíselný pro všechny celočíselné vektory b. Dokažte větu Hoffman-Kruskal.

Příklad 14. Dokažte, že $\{x;\ Ax \leq b\}$ je celočíselný pro všechny celočíselné vektory b, jestliže A je totálně unimodulární. Platí obecně i opačná implikace?