Série I - matice

Deadline: 24.11.2011

1 Prazvláštní matice

Někdy se nám stává, že bychom pro počítání potřebovali velmi podivné, ba prazvláštní matice. Máme na ně různá omezení a bývá nutností zkonstruovat nebo jinak ověřit, že takové matice vůbec existují. Zkusme si jednu takovou (velmi užitečnou) vytvořit.

Příklad 1 (10 bodů)**.** Pro $n = 2^k$ zkonstruujte matici $H \in \{-1, 1\}^{n \times n}$ tak, aby platilo, že $H \cdot H^T = n \cdot I_n = H^T \cdot H$.

Poznámky.

- Lze búno požadovat, aby první řádek byl složený jen z jedniček?
- Zamyslete se, zda musí či nemusí být matice symetrická.
- Označme $diag(A)$ vektor diagonály matice A, tedy vektor $(a_{i,i})_{i=0}^{n}$. Je možné, aby při daných omezeních na $H \in \{-1, 1\}^{n \times n}$ bylo $diag(H \cdot H^T) \neq (n, \ldots, n)$? Zamyslete se jak by pro matici $A \in \{-k, k\}^{n \times n}$ pro $k \in \mathbb{N}$ vypadala $diag(A \cdot A^T)$.

Nápověda.

- To, že n je tvaru 2^k by mělo napovědět, že se chce rekurzivní konstrukce, tak toho využijme a definujme matici $H_1 = (1)$ a zkuste pokračovat.

2 Pascalovi matice

Definujme si další (pěkné) matice - pascalovi matice. Pascalova matice řádu n, označme ji P_n je matice tvaru $n \times n$ a obsahuje postupně řádky pascalova trojúhelníku doplněné zprava nulami. Dále definujme posunuté pascalovi matice PP_n, opět čtvercové $n \times n$, toto jsou blokové matice a tvoří je blok (1), nulové vektory $1 \times (n-1)$ a Pascalova matice P_{n-1}. Tedy například:

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, PP_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 2 (4 body)**.** Pro matice P_n nalezněte matice X_n takové, že $X_n \cdot P_n = I_n$ a matice Y_n takové, že $Y_n \cdot P_n = PP_n$.

3 Malé počítání s malými maticemi

Většinou bývá pěkné se zamyslet nad tím, kdy problém (pro nás zatím většinou řešení rovnic) opravdu řešení má a kdy je to naprostá ztráta času. Pojďme se podívat na trochu jiný, ikdyž velmi příbuzný problém hledání inversní matice. Navíc se spousta malých tvrzení se dá uvzrecyklovat, pokud použijeme k tomu příhodnou terminologii.

Příklad 3 (2 body)**.** Mějme matici A tvaru 2×2, obecně bychom si ji zapsali asi nějak takto:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Určete podmínky na čísla a, b, c, d při kterých inverze A^{-1} existuje.

Často se nám také stane, že za málo peněz lze získat více muziky. Tedy, že při použití minima úsilí lze získat obecnější tvrzení.

Příklad 4 (3 body)**.** Zamyslete se tedy nad tím, zda by se něco podobného nedalo využít i pro blokové 2×2 matice, tedy matice tvaru:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

kde A, B, C, D jsou čtvercové $n \times n$ matice.

Matice již umíme sčítat, odčítat, násobit a (za jistých podmínek) i dělit a začínáme se k nim chovat jako k běžným číslům, která známe již od mala. Další operace, kterou jsme se naučili je umocňování, pojďme se mu tedy podívat trochu a zoubek. Navíc se opět dozvíme něco o maticích, které jsou svým způsobem hezké (tj. platí pro ně více než pro ostatní a to je věc, které si je třeba všímat).

Příklad 5 (Samoinverzní matice - 2 body)**.** Mějme opět obecnou 2×2 matici A obsahující čísla a, b, c, d. Určete za jakých podmínek platí $A = A^{-1}$ a tedy i $A^2 = I_2$.

4 Soustavy s parametrem

Dosud jsme se zabývali hlavně maticemi, vektory a soustavami lineárních rovnic. Přirozeným zobecněním lineárních rovnic jsou lineární rovnice s parametrem (s nimi jste se pravděpodobně setkali již na střední skole). Práce s nimy se mnoho neliší od standartní práce s maticemi, jen místo matice A máme matici závislou na parametru $A(\lambda)$, což si lze představit tak, že jakoby najednou pracujeme s více maticemi. Také je třeba si dát pozor na podmínky, za jakých lze provádět **ekvivalentní** úpravy. V praxi často míváme jistý stupeň volnosti (parametr).

Příklad 6 (2 body)**.** Vyšetřete množinu řešení pro reálnou matici závislou na reálném parametru:

$$A(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array} \right).$$

5 Matice ranku 1

Na cvičeních jsme si ukazovali matice ranku 1, které byli vždy symetrické. Nyní se zkusíme podívat dále. Zkuste si dokázat následující tvrzení o takovýchto maticích, již ne nutně symetrických.

Příklad 7 (6 bodů)**.** Buď $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ čtvercová matice. Potom $rank(A) \leq 1$ právě když existují čísla $k_1, k_2, \ldots, k_n$ a čísla $l_1, l_2, \ldots, l_n$ taková, že $a_{ij} = k_i \cdot l_j \;\; \forall i, j$.

6 Matice zvláštních zobrazení

Na cvičeních jsme se podívali na některé vlastnosti speciálních (lineárních) zobrazení, která jsme definovali jako $f_A : u \to A \cdot u$. Pojďme se nyní podívat na speciálnější zobrazení tohoto druhu. Definujme matice:

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \; R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix},$$

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pojďme se nyní zamyslet nad zobrazeními definovanými pomocí těchto matic. Definujme postupně zobrazení $f(\phi) = f_{R_x(\phi)}, g(\phi) = f_{R_y(\phi)}, h(\phi) = f_{R_z(\phi)}$.

Příklad 8 (2 body)**.** Zamyslete se jakou akci provedou zobrazení $f(\phi), g(\phi), h(\phi)$ na vektoru u.

Příklad 9 (2 body)**.** Jak vypadají matice definující inverzní zobrazení? Tj. například matice $A(\phi)$, pro kterou platí, že $f^{-1}(\phi) = f_{A(\phi)}$.

Příklad 10 (3 body)**.** Jak vypadají matice definující složená zobrazení? Tj. například matice $A(\phi)$, pro kterou platí, že $f(\phi) \circ g(\phi) = f_{A(\phi)}$.

Příklad 11 (Bonus - 6 bodů)**.** Definujme si čtvercovou matici řádu n

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

nalezněte řešení pro následující pravé strany: $(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n)^T$, $(2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots,\ 2^n)^T$. Dále mějme libovolnou aritmetickou posloupnost $(a_i)_{i=1}^n$ a definujme $s_k = \sum_{i=1}^k a_i$ (tedy s_k je částečný součet dané aritmetické řady od prvního do k-tého členu). Nalezněte řešení rovnice s pravou stranou $(s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n)^T$.