Příklad 1 (Ekvivalence a ti další)**.** Rozhodnžte, zda jsou ekvivalence následující relace a pokud ano, určete třídy ekvivalence:

a) $X_1 = \mathbb{N}, xR_1y \Leftrightarrow p|(x-y)$ (zbytkové třídy modulo $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$)

b) $X_2 = \mathbb{Z} \setminus 0, xR_2y \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$

c) $X_3 = \mathbb{N}, xR_3y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : z|y \wedge z|x$. Co se stane, budeme-li požadovat $z > 1$?

Příklad 2 (Uzavřenost reflexivity)**.** Buďte R a S reflexivní relace na téže množině. Které z následujících relací jsou také reflexivní?

a) $R \cap S$

b) $R \setminus S$

c) $R \,\Delta\, S$

d) $R \circ S$

e) R^{-1}

Příklad 3 (Skládání relací nekomutuje)**.** Nalezněte množinu a relace R a S na této množině takové, že $R \circ S \neq S \circ R$.

Příklad 4 (Skládání funkcí)**.** Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:

a) Jsou-li funkce f a g prosté, potom je i funkce $f \circ g$ prostá.

b) Jsou-li funkce f a g na, potom je funkce $f \circ g$ také na.

c) Je-li funkce f prostá a funkce g libovolná, potom je funkce $f \circ g$ (nebo $g \circ f$) prostá.

d) Je-li funkce f na a funkce g libovolná, potom je funkce $f \circ g$ (nebo $g \circ f$) na.

Příklad 5 (Moivrova věta)**.** Dokažte indukcí Moivrovu větu:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

Hint 1. Použijte vztahy: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$, $\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$.

Příklad 6 (Součet binomických čísel)**.** Pomocí fakt $\binom{0}{0} = 1, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ a $\binom{n}{k} = 0$ když $k < 0$ nebo $k > n$ dokažte, že:

a)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n-m} \binom{m+k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Příklad 7 (Rozdělení roviny)**.** Dokažte že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{1}{2}(n^2 + n)$. Pokuste se odvodit podobnou hranici pro rozdělení prostroru rovinami (nebo prostoru vyšší dimenze nadrovinami).

Příklad 8 (liché == sudé)**.** Dokažte, že pro každou neprázdnou konečnou množinu je počet jejích podmnožin sudé velikosti stejný jako počet podmnožin velikosti liché.