Věta 1 (Princip inkluze a exkluze)**.** Buďte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny. Potom

$$|\bigcup_{i\in[n]} A_i| = \sum_{\emptyset\neq X\subseteq[n]} (-1)^{|X|+1} \cdot |\bigcap_{i\in X} A_i|.$$

Věta 2 (Princip inkluze a exkluze—průniková verze)**.** Buďte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny a nechť navíc $A_i \subseteq U$ pro nějakou konečnou množinu U. Potom

$$\left|\bigcup_{i\in[n]} A_i\right| = \sum_{X\subseteq[n]} (-1)^{|X|} \cdot \left|\bigcap_{i\in X} \Big(U \setminus A_i\Big)\right|,$$

kde výraz $\bigcap_{i\in\emptyset} U \setminus A_i$ definujeme jako množinu U.

Příklad 1. Dokažte Větu 2.

Příklad 2. Kolik čísel zbyde v množině $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ po vyškrtání všech násobků čísel:

1. $3, 5$ a 7,
2. $4, 6$ a 9?

Příklad 3. Kolik je na n-prvkové množině

1. relací,
2. symetrických relací,
3. reflexivních relací,
4. anti-symetrických relací?

Příklad 4. Kolik existuje nezáporných celočíslených řešeni lineární rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n?$$

Příklad 5. Kolik existuje celočíselných řešení rovnice $x_1+x_2+x_3 = 12$ splňujících $0 \leq x_i \leq 5$?

Příklad 6. Kolik je (devítimístných) telefonních čísel, které obsahují každé liché číslo alespoň jednou?

Příklad 7. Pro množiny A, B a C platí: $|A| = 14, |B| = 10, |A \cup B \cup C| = 24$ a $|A \cap C| = 6$. Která tvrzení jsou pravdivá?

1. C má nanejvýš 24 prvků,
2. C má alespoň 6 prvků,
3. $A \cup B$ má právě 18 prvků.

Příklad 8. Kolik je zobrazení $f : [n] \to [k]$, která jsou na?

Příklad 9. Kolik existuje pořadí písmen A,B,D,E,I,K,M,N,R,Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov BAR, DEN a RAZIE?

Úkol 1 (2 body)**.** Uvažme, že telefonní čisla v Nikdestánu buď začínají 56 nebo končí 7 (popřípadě splňují obě pravidla). Kolik různých čísel je v Nikdestánu?

Úkol 2 (3 body)**.** Kolik je ekvivalencí na n-prvkové množině?