

<http://www.kam.mff.cuni.cz/~knop/vyuka/ads/>

Věta (Master Theorem—kdyby náhodou). *Nechť $a \geq 1, c > 1, d \geq 0$ jsou reálná čísla a nechť $T : N \rightarrow N$ je neklesající funkce taková, že pro všechna n ve tvaru c^k (kde $k \in N$) platí*

$$T(n) = aT(n/c) + F(n)$$

kde pro funkci $F : N \rightarrow N$ platí $F(n) = \Theta(n^d)$. Označme $x = \log_c a$. Potom

je-li $x < d$, *potom platí $T(n) = \Theta(n^d)$,*

je-li $x = d$, *potom platí $T(n) = \Theta(n^d \log n) = \Theta(n^x \log n)$,*

je-li $x > d$, *potom platí $T(n) = \Theta(n^x)$.*

Příklad 1. Odvoďte formulku pro $T(n)$, která je zadána rekurentní rovnicí $T(n) = 2T(n/2) + \log n$.

Příklad 2. Buďte $a + bi, c + di$ dvě komplexní čísla. Nechť navíc počet bitů potřebných pro zápis čísel a, b, c, d je shora omezen n .

Triviální algoritmus na vynásobení těchto dvou čísel vyžaduje 4 násobení—jmenovitě ac, ad, bc a bd . Tedy by se dal upočítat pomocí Master Theoremu z rekurzivní rovnice $T(2n) = 4T(n) + O(1)$.

Nalezněte rychlejší algoritmus pro násobení dvou komplexních čísel v závislosti na počtu bitů n .

Příklad 3. Mějme dvě n -bitová čísla x, y . Nalezněte co možná nejefektivnější algoritmus pro jejich vynásobení v závislosti na n . Můžete předpokládat, že n je tvaru 2^k pro $k \in \mathbb{N}$.

Příklad 4. Dostanete posloupnost n čísel z množiny $\{1, 2, \dots, k\}$ a vaším úkolem je zjistit, zda se některá z hodnot tvoří většinu—zabírá striktně více než $n/2$ pozic.

Příklad 5. Je možné nalézt lepší algoritmus na majoritu, pokud by byla posloupnost n čísel navíc setříděná? Bohužel lepší nyní neznamená lepší v $O()$ notaci, snažíme se opravdu minimalizovat počet porovnání.

Příklad 6. Uvažme následující algoritmus:

```
1 int myTest( int n ) {
2   if ( n == 0 ) return 0;
3   else {
4     int i = random( n - 1 );
5     return myTest( i ) + myTest( n - 1 - i );
6   }
7 }
```

Analyzujte jeho časovou složitost v průměrném případě. Za předpokladu, že volání `random()` stojí jednotku času a volání `return` a sčítání jsou zanedbatelná.