Matematická analýza 1

Martin Klazar

(předběžná verze k 29. 8. 2024, 7 kapitol ze 14)

Věnováno památce
Jiřího Matouška (1963–2015)

Was sich überhaupt sagen lässt, lässt sich klar sagen; . . .[1]

L. Wittgenstein [13, Vorwort (Předmluva)]

[1] Vynechaný závěr citátu je známější, než jeho začátek: „Was sich überhaupt sagen lässt, lässt sich klar sagen; und wovon man nicht reden kann, darüber muss man schweigen.“ Co lze vůbec říci, lze říci jasně; a o čem nelze mluvit, o tom nutno mlčet. Podle [14, str. 8]: „Co se vůbec dá říci, dá se říci jasně; a o čem nelze mluvit, k tomu se musí mlčet.“

Úvod

Tato učebnice Matematické analýzy obsahuje čtrnáct kapitol a jednu přílohu. Kapitoly rozvíjejí mých čtrnáct přednášek v předmětu *Matematická analýza 1* (NMAI054), který jsem v zimě a na jaře v roce 2024 česky vyučoval v rámci Informatické sekce Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Použil jsem i čtrnáct přednášek v letním semestru předchozího školního roku 2022/23, viz

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24.html` a
`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI23.html`.

Čas ale letí, poprvé jsem o analýze přednášel 5. října 2004, viz

`https://kam.mff.cuni.cz/%7Eklazar/MA04.html`.

Každá kapitola obsahuje úvodní shrnutí a řadu úloh k procvičení látky. Jejich řešení nebo návody k nim jsou uvedeny v příloze. Obsah každé kapitoly a každého jejího oddílu by měl být zřejmý z názvu, viz strany v až vi. Tento text je minimální verzí podstatně ambicióznější a připravované *Matematické analýzy 1*$^+$, která bude obsahovat dalších šest kapitol a další tři přílohy. Pro anglický studijní program jsem vypracoval překlad *Mathematical Analysis 1*.

Učebnici věnuji památce Jiřího Matouška, mého kolegy z Katedry aplikované matematiky MFF UK. Byl jedním z našich největších matematiků a informatiků. S velkým zaujetím si připravoval přednášky z analýzy pro školní rok 2014/15, které mu už ale osud nedopřál přednést.

V Praze a v Lounech v srpnu až říjnu 2024 Martin Klazar

Obsah

Kapitola 1

Přednáška 1. Úplnost a nespočetnost $\mathbb{R}$

První kapitola vychází z první přednášky

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred1.pdf`

přednesené 22. 2. 2024. Oddíl 1.1 uvádí dva paradoxy nekonečných součtů. Oddíl 1.2 podává stručný přehled logického a množinového značení, mimo jiné definujeme uspořádané dvojice a trojice. V oddílu 1.3 zavedeme funkce a uvedeme přehled jejich základních typů a operací s nimi. Oddíl 1.4 je věnován lineárním uspořádáním a definici infim a suprem. V oddílu 1.5 definujeme racionální čísla, tělesa a uspořádaná tělesa. Ve větě 1.5.16 dokážeme, že rovnice $x^2 = 2$ nemá v oboru zlomků řešení. Podle důsledku 1.5.18 lineární uspořádání zlomků není úplné, obsahuje neprázdné a shora omezené množiny bez suprem. Oddíl 1.6 je věnován reálným číslům, důležité jsou definice 1.6.3, věta 1.6.12 (pravěta o limitě monotónní posloupnosti) a důkaz úplnosti $\mathbb{R}$ ve větě 1.6.14. V oddílu 1.7 definujeme konečné, nekonečné, spočetné a nespočetné množiny. Ve větě 1.7.5 dokážeme spočetnost zlomků. Podle Cantorovy věty 1.7.7 neexistuje zobrazení z žádné množiny na její potenci. Důsledkem 1.7.17 je nespočetnost reálných čísel. Definice 1.7.13 popisuje desetinné rozvoje reálných čísel.

1.1 Dva paradoxy

• *Co analyzuje matematická analýza?* Nekonečné operace a procesy. Nekonečno může vést k paradoxům a dva si ukážeme. Zřejmě

$$S = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n} + \cdots = 0\,.$$

Přerovnání sčítanců v S ale <u>změní součet</u>: $S = 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \cdots > 0$, neboť $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n(2n-1)} > 0$. Takže toto zavedení spočetného součtu $S = a_1 + a_2 + \ldots$ jako limity $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$

posloupnosti částečných součtů $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ (limita reálné posloupnosti je zavedena v definici 2.1.16) *není moc dobré*, protože — v kontrastu s konečnými součty — výsledný součet může záviset na pořadí sčítanců. V oddílu 3.5 třetí přednášky zavedeme lepší spočetné součty, které jsou, stejně jako konečné součty, komutativní a asociativní.

Je tu taky zvláštní nekonečná tabulka s položkami -1, 0 a 1. Na hlavní diagonále má 1, nad ní -1 a jinde 0.

1	-1	0	0	0	$\ldots$	$\sum = 0$
0	1	-1	0	0	$\ldots$	$\sum = 0$
0	0	1	-1	0	$\ldots$	$\sum = 0$
0	0	0	1	-1	$\ldots$	$\sum = 0$
0	0	0	0	1	$\ldots$	$\sum = 0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\sum = 1$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\sum = 0$	$\ldots$	$\sum = 1 \setminus 0$

Celkový součet po řádcích je 0, ale po sloupcích je 1!?

Úloha 1.1.1 *V tabulce s nezápornými položkami tento paradox nenastane. Součet po řádcích i po sloupcích vyjde stejně, může ale být* $+\infty$*.*

Spočetnými součty zvanými řady se budeme zabývat v oddílech 3.5 a 4.1.

1.2 Logické a množinové značení

Úloha 1.2.1 *Umíte pojmenovat a napsat následující řecká písmena?*

$$\alpha,\ \beta,\ \Gamma,\ \gamma,\ \Delta,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \Theta,\ \theta,\ \vartheta,\ \iota,\ \kappa,\ \Lambda,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \Xi,\ \xi,\ o,\ \Pi,\ \pi,\ \rho,\ \Sigma,\ \sigma,$$

$$\tau,\ \Upsilon,\ \upsilon,\ \Phi,\ \phi,\ \varphi,\ \chi,\ \Psi,\ \psi,\ \Omega,\ \omega\ .$$

Pomocí symbolu $\equiv$ definujeme ve výrazech jako $a \equiv b$ nový symbol a pomocí již známé veličiny či výrazu b. Výjimečně může nový symbol stát napravo od $\equiv$. Pro tento účel se používají i symboly $:=$, popř. $=:$.

• *Logické značení.* φ, ψ, θ, ... buďte výroky, tvrzení s jednoznačnou pravdivostní hodnotou buď pravda P, anebo nepravda N (viz [10, kap. 2]). Spojujeme je logickými spojkami $\varphi \vee \psi$ (nebo, disjunkce), $\varphi \wedge \psi$ (a (zároveň), konjunkce), $\varphi \Rightarrow \psi$ (z – plyne –, implikace), $\varphi \iff \psi$ (ekvivalence) a $\neg\varphi$ (zápor, negace). Použití těchto spojek je dobře známé. Například pro každou kombinaci pravdivostních hodnot výroků φ a ψ oba výroky

$$\neg(\varphi \vee \psi) \iff \neg\varphi \wedge \neg\psi \ \text{ a } \ \neg(\varphi \wedge \psi) \iff \neg\varphi \vee \neg\psi$$

platí, mají vždy pravdivostní hodnotu P. Jsou to tedy takzvané tautologie. V zápisu složených výroků jsou důležité závorky a vazebná síla spojek. Podle konvence $\neg$ váže silněji než $\vee$ a $\wedge$, a ty zase silněji než $\Rightarrow$ a $\iff$. Odpovídající závorky tak lze vynechat.

Úloha 1.2.2 *Dokažte, že* $(\varphi \Rightarrow \psi) \iff (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$ *je tautologie.*

Nechť tvrzení $\varphi(x)$ je výroková forma s proměnnou x. Po nahrazení každého výskytu proměnné x libovolným, ale vždy týmž, prvkem a z oboru formy dostaneme výrok $\varphi(a)$. Obor výrokové formy $\varphi(x)$ je jí přiřazený soubor objektů a, pro které lze rozhodnout, zda výrok $\varphi(a)$ platí. V zápisech

$$\forall x\,\big(\varphi(x)\big) \text{ a } \exists x\,\big(\varphi(x)\big)$$

je použitý obecný kvantifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$. Znamenají po řadě, že pro každý prvek a z oboru formy je výrok $\varphi(a)$ pravdivý a že v oboru formy existuje prvek a, že výrok $\varphi(a)$ je pravdivý.

Úloha 1.2.3 *Pro každou výrokovou formu* $\varphi(x)$ *jsou oba výroky*

$$\neg\exists x\,\big(\varphi(x)\big) \iff \forall x\,\big(\neg\varphi(x)\big) \;\; a \;\; \neg\forall x\,\big(\varphi(x)\big) \iff \exists x\,\big(\neg\varphi(x)\big)$$

pravdivé.

Pravdu a pravdivost probereme v *MA 1*$^+$. Obecný kvantifikátor $\forall$ se často vynechává a rozumí se implicitně. Například v oboru přirozených čísel zápis $m+n=n+m$ znamená, že $\forall m\,\big(\forall n\,(m+n=n+m)\big)$.

• *Zápis množiny výčtem prvků.* Množinu chápeme jako jasně vymezený soubor jiných množin, které jsou jejími prvky. Symbol $\emptyset$ označuje prázdnou množinu. Je to množina bez prvků, takže žádná množina není jejím prvkem. Značení $x \in A$ (resp. $x \notin A$) říká, že množina x je (resp. není) prvkem množiny A. Konečnou množinu lze vždy, alespoň teoreticky, zapsat výčtem jejích prvků.

Definice 1.2.4 (výčet prvků) *Zápis neprázdné množiny* M *výčtem prvků je zápis ve tvaru*

$$M = \{p_1,\, p_2,\, \ldots,\, p_n\}\,,$$

kde $n = 1, 2, \ldots$ *je přirozené číslo a* p_i *jsou všechny množiny, které jsou prvky množiny* M*. Množiny* p_i *se mohou opakovat. Prázdnou množinu zapisujeme symbolem* $\emptyset$*.*

Máme tak například množinu $\{3, 1, 5\} = \{1, 5, 3, 5, 5\}$ se třemi (různými) prvky, přirozenými čísly 1, 3 a 5. V *MA 1*$^+$ uvidíme, jak se přirozená čísla vyjádří jako množiny. Nebo máme množinu

$$M = \{a,\, b,\, 2,\, b,\, \{\emptyset,\, \{\emptyset\}\},\, \{a\}\}\,.$$

Úloha 1.2.5 *Kolik má* M *prvků?*

• *Dědičně konečné množiny.* Situace se zápisem konečné množiny výčtem prvků ale není tak jednoduchá, jak se obvykle líčí. Pro přesné zapsání množiny výčtem prvků nestačí její konečnost. Konečný musí být i každý její prvek, stejně jako každý prvek jejího prvku, atd. Například množina $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ není přesně zapsána, dokud neumíme rozhodnout, které rovnosti $x_1 = x_2$, $x_1 = x_3$ a $x_2 = x_3$ platí. Jinak nevíme, kolik má X prvků. Množinová rovnost $x = y$ se v naivní teorii množin dá rozhodnout jen axiomem extenzionality. Podle něj se dvě množiny rovnají, právě když mají stejné prvky. Abychom tyto prvky dokázali (v našem zápisu) všechny projít, musí jich být jen konečně mnoho. Jsme tak vedeni k následující definici. V ní konečnost zatím chápeme intuitivně, přesně ji definujeme později.

Definice 1.2.6 (dědičná konečnost) *Množina x je dědičně konečná, pokud pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ a pro každý řetězec množin*

$$x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_0 = x$$

je množina x_n konečná.

Příkladem dědičně konečné množiny je číslo čtyři v množinovém tvaru:

$$4 = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\}\}\}\}\,.$$

Jiná dědičně konečná množina je $\{\{\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}\}\}$. Axiom fundovanosti, který uvedeme v *MA 1*$^+$, zaručuje, že každý řetězec množin $x_0 \ni x_1 \ni \ldots$ je konečný.

Úloha 1.2.7 *Nechť $x_0 \ni x_1 \ni \cdots \ni x_n$ je maximální řetězec množin do sebe vnořených vzhledem k náležení, který se už nedá prodloužit. Čemu se rovná množina x_n?*

V *MA 1*$^+$ ukážeme, že množina se dá zapsat takzvaným úplným výčtem prvků, právě když je dědičně konečná.

- *Zápis množiny vlastností prvků.* Množinu také můžeme definovat nějakou vlastností jejích prvků.

Definice 1.2.8 (zápis vlastností) *Zápis množiny M pomocí vlastnosti jejích prvků je zápis ve tvaru*

$$M = \{x \in N :\ \varphi(x)\} \ \ \textit{nebo}\ \ M = \{x :\ \varphi(x)\}\,,$$

kde N je již definovaná množina a $\varphi(x)$ je výroková forma. Množina M tedy sestává z těch množin x ležících v N, že $\varphi(x)$ je pravda, resp. z těch množin x ležících v oboru formy $\varphi(x)$, že $\varphi(x)$ je pravda.

Předpokládá se, že každý prvek množiny N je prvkem oboru formy $\varphi(x)$. Nechť $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je množina přirozených čísel a $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ jsou nezáporná celá čísla. Například množina

$$M = \{n \in \mathbb{N} :\ \exists\, m \in \mathbb{N}\,\big(n = 2 \cdot m\big)\}$$

sestává ze všech sudých přirozených čísel. Jak jsme ale definovali $\mathbb{N}$? K tomu se vrátíme v *MA 1*$^+$.

Úloha 1.2.9 *Definujte takto množinu prvočísel* $\mathbb{P}$.

Čtenářka asi ví, že definice množiny ve tvaru $M = \{x : \varphi(x)\}$ je obecně problematická. Ne každá výroková forma $\varphi(x)$ má totiž jasně definovaný obor. V definici $M = \{x \in N : \varphi(x)\}$ už máme definovanou množinu N a vlastně ji postulujeme jako obor formy $\varphi(x)$. V definici $M = \{x : \varphi(x)\}$ ale množiny x bereme odkudkoli. To ale, jak teď připomeneme, je obecně sporné.

• *Russelův paradox.* Anglický matematik a filosof *Bertrand Russel (1872–1970)* poukázal na to, že definice množiny

$$M = \{x : x \notin x\},$$

kde jako obor formy $x \notin x$ bereme všechny množiny x, vede ke sporu.

Úloha 1.2.10 *Jak?*

• *Vztahy množin.* A je podmnožinou B, $A \subset B$, pokud každé $x \in A$ je též prvkem B. Množiny A a B jsou disjunktní, pokud nemají společný prvek. Množiny A a B se rovnají, $A = B$, právě když $\forall x \big(x \in A \iff x \in B\big)$, toto je axiom extenzionality.

Úloha 1.2.11 *Platí ekvivalence* $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$.

• *Operace s množinami.* Nechť A a B jsou množiny. Jejich sjednocení $A \cup B \equiv \{x : x \in A \vee x \in B\}$ a průnik $A \cap B \equiv \{x \in A : x \in B\}$. Suma (množiny A) $\bigcup A \equiv \{x : \exists b \in A \big(x \in b\big)\}$. Průnik (množiny A) $\bigcap A \equiv \{x : \forall b \in A \big(x \in b\big)\}$, ale jen pro $A \neq \emptyset$. Rozdíl $A \setminus B \equiv \{x \in A : x \notin B\}$. Potence (množiny A) $\mathcal{P}(A) \equiv \{X : X \subset A\}$. Jak víme z pasáže o Russelově paradoxu, správné jsou jen definice průniku dvou množin a jejich rozdílu. Definice tvaru $X \equiv \{x : \cdots\}$ není formálně přípustná, množina x se nemůže brát odkudkoli, ale zase jen z nějaké jiné množiny. Jinak musíme množinu X zavést, postulovat jako axiom. Tak se ve formalizované teorii množin zavádí sjednocení, suma a potence. Absolutní hodnota $|X|$ ($\in \mathbb{N}_0$) označuje počet prvků konečné množiny X.

Úloha 1.2.12 *Množiny* A *a* B *jsou disjunktní, právě když* $A \cap B = \emptyset$.

Úloha 1.2.13 *Proč se v definici průniku množiny* A *požaduje, že* $A \neq \emptyset$*?*

Úloha 1.2.14 *Je pro dvě konečné množiny* A *a* B *vždy* $|A \setminus B| = |A| - |B|$*?*

Úloha 1.2.15 *Co je* $\mathcal{P}(\emptyset)$*? Pro* $n = 0, 1, 2, \ldots$, $|\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})| =$*?*

• *Dvojice a trojice.* Definice uspořádané dvojice dvou množin pochází od polského matematika *Kazimierze Kuratowskiho (1896–1980).*

Definice 1.2.16 (dvojice) *A a B buďte množiny. Množina*

$$(A,\, B) \equiv \{\{B,\, A\},\, \{A\}\}$$

je (uspořádaná) dvojice množin A a B.

Úloha 1.2.17 *Pomocí axiomu extenzionality dokažte ekvivalenci*

$$(A, B) = (C,\, D) \iff A = C \wedge B = D\ .$$

Uspořádanou trojici množin A, B a C definujeme jako

$$(A,\, B,\, C) = \{(1,\, A),\, (2,\, B),\, (3,\, C)\}\ ,$$

a nikoli jako $(A, (B, C))$ nebo $((A, B), C)$, jak se často uvádí (i v učebnicích teorie množin!). Při použití definice

$$(A,\, B,\, C) \equiv (A,\, (B,\, C))$$

totiž není jasné, zda množina (A, B, C) je uspořádaná trojice množin A, B a C nebo uspořádaná dvojice množin A a (B, C).

Definice 1.2.18 (uspořádané k-tice) *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a nechť $A_1,\, \ldots,\, A_k$ jsou množiny. Jejich uspořádaná k-tice je množina*

$$(A_1,\, \ldots,\, A_k) = \{(1,\, A_1),\, (2,\, A_2),\, \ldots,\, (k,\, A_k)\}\,.$$

Úloha 1.2.19 *Nechť $k, l \in \mathbb{N}$, $A = (A_1, \ldots, A_k)$ je uspořádaná k-tice, $B = (B_1, \ldots, B_l)$ je uspořádaná l-tice a $A = B$. Dokažte, že pak $k = l$ a pro každé $i = 1, \ldots, k$ se $A_i = B_i$.*

Standardní uspořádané k-tice definované iterováním dvojice, to jest

$$(A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_k) = (A_1,\, (A_2,\, (\ldots,\, (A_{k-1},\, A_k) \ldots)))\,,$$

vlastnost uvedenou v předchozí úloze pochopitelně nemají.

1.3 Funkce a relace

Funkce zavedeme množinově. Skládání funkcí zavedeme obecně, v souladu s definicí a používáním elementárních funkcí ve čtvrté přednášce.

• *Funkce a shodnost funkcí.* Pro dvě množiny A a B jejich kartézský součin je množina

$$A \times B = \{(a,\, b) :\ a \in A,\, b \in B\}\ .$$

Každá množina $C \subset A \times B$ pak je (binární) relace mezi A a B. Místo náležení $(a, b) \in C$ píšeme aCb, např. $2 < 5$. Pokud $A = B$, máme relaci na množině A.

Definice 1.3.1 (funkcionální relace) *Relace $C \subset A \times B$ mezi množinami A a B je funkcionální, existuje-li pro každé $a \in A$ právě jedno $b \in B$, že aCb.*

Definice 1.3.2 (funkce) *Funkce (též zobrazení) f z množiny A do množiny B je uspořádaná trojice (A, B, f), kde f je funkcionální relace mezi A a B. Zapisujeme ji symbolem*

$$f\colon A \to B\,.$$

Pro každé $a \in A$ označíme to jednoznačné $b \in B$, že afb, jako $f(a)$. Celou trojici (A, B, f) často označujeme stručně, i když nepřesně, jako f, viz následující definice a úloha.

Místo $f\colon A \to B$ píšeme i $A \ni a \mapsto f(a) \in B$. Množina A je definiční obor funkce f a B je její obor hodnot. Definiční obor funkce f označujeme symbolem $M(f)$. Prvek b je hodnota funkce f na jejím argumentu a. Matematická definice objektů nějakého druhu není úplná bez kritéria jejich shodnosti. To je popis situací, kdy dva objekty daného druhu považujeme za stejné, i když se jako množiny liší. Příkladem shodností jsou izomorfismy různých algebraických a kombinatorických struktur. Obvykle jde o relace ekvivalence (viz definice 1.3.16). Shodnost funkcí v našem pojetí definujeme následovně.

Definice 1.3.3 (shodnost funkcí) *Funkce (A, B, f) a (C, D, g) jsou shodné, to jest prakticky totožné, pokud $f = g$, to jest f a g se rovnají jako množiny uspořádaných dvojic.*

Úloha 1.3.4 *Funkce (A, B, f) a (C, D, g) jsou shodné $\iff$ $A = C$ a $f = g$.*

Jinak řečeno, shodné funkce se mohou lišit jen v oborech hodnot.

Pro funkci $f\colon A \to B$ a množinu C definujeme množiny

$$\begin{aligned} f[C] &= \{f(a)\colon\ a \in C \cap A\}\ (\subset B)\ \ldots\ \underline{\text{obraz}}\text{ množiny } C \text{ funkcí } f \text{ a} \\ f^{-1}[C] &= \{a \in A\colon\ f(a) \in C\}\ (\subset A)\ \ldots\ \underline{\text{vzor}}\text{ množiny } C \text{ funkcí } f\,. \end{aligned}$$

Ano, množina C je zcela libovolná.

Úloha 1.3.5 *Je pravda, že $f^{-1}[f[C]] = C$ a že $f[f^{-1}[C]] = C$?*

• *Druhy funkcí.* Jak víme, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ a $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ a nechť $[0] = \emptyset$. Nechť X je libovolná množina a $n \in \mathbb{N}_0$. Tři důležité druhy funkcí jsou posloupnosti, slova a operace.

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} \to X \quad &\ldots\quad \text{je } \underline{\text{posloupnost}} \text{ (v množině } X)\,, \\ u\colon [n] \to X \quad &\ldots\quad \text{je } \underline{\text{slovo}} \text{ (nad abecedou } X) \text{ a} \\ o\colon X \times X \to X \quad &\ldots\quad \text{je } \underline{\text{(binární) operace}} \text{ (na množině } X)\,. \end{aligned}$$

Pro posloupnost a v X místo $a(n)$ píšeme a_n a označíme ji jako $(a_n) \subset X$. Slovo u nad X rozepíšeme jako $u_1 u_2 \ldots u_n$, kde $u_i = u(i)$, $i \in [n]$. Pro $n = 0$ máme prázdné slovo $u = \emptyset$. Hodnotu operace $o((a,b)) = c$ zapíšeme jako $a\,o\,b = c$, např. $1 + 1 = 2$. Funkci $o\colon X \to X$ nazveme unární operací (na množině X).

Funkce $f\colon X \to Y$ je

$$\begin{aligned}
\text{prostá (injektivní, injekce)} &\overset{\text{def}}{\iff} f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\ ,\\
\text{na (surjektivní, surjekce)} &\overset{\text{def}}{\iff} f[X] = Y\ ,\\
\text{bijekce (bijektivní)} &\overset{\text{def}}{\iff} f \text{ je na a je prostá}\ ,\\
\text{konstantní} &\overset{\text{def}}{\iff} \exists\, c \in Y\ \forall\, x \in X\ \big(f(x) = c\big) \text{ a}\\
\text{identická} &\overset{\text{def}}{\iff} X \subset Y \wedge \forall\, x \in X\ \big(f(x) = x\big)\ .
\end{aligned}$$

Úžeji rozumíme identickou funkcí na X funkci $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, $\mathrm{id}_X(x) = x$.

Úloha 1.3.6 *Kdy je identická funkce $f\colon X \to Y$ bijekce?*

Úloha 1.3.7 *Je pravda, že když jsou dvě funkce shodné ve smyslu definice 1.3.3, pak současně jsou, resp. nejsou, injektivní? Stejná otázka pro surjektivitu, bijektivnost, konstantnost a identičnost.*

• *Operace na funkcích.* Zavedeme tři operace na funkcích. Jsou motivovány elementárními funkcemi ve čtvrté přednášce. První z nich je unární. Nechť $f\colon X \to Y$ je prostá funkce. Její inverzní funkce (inverz) f^{-1} je funkce

$$f^{-1}\colon f[X] \to X, \text{ kde } f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y\ .$$

Obecněji i každou funkci $g\colon f[X] \to Y$ pro $Y \supset X$ danou tímto předpisem, považujeme za inverzní k f. Nakonec g je shodná s f^{-1}.

Úloha 1.3.8 *Značení $f^{-1}[A]$ má dva významy, vzor množiny A zobrazením f a obraz množiny A inverzem f^{-1}. Nemohly by být v rozporu?*

Úloha 1.3.9 *Nechť f je injekce. Rozhodněte, zda funkce f a $(f^{-1})^{-1}$ jsou shodné a zda se množinově rovnají (jako uspořádané trojice). Táž otázka pro funkce f^{-1} a $((f^{-1})^{-1})^{-1}$.*

Operace skládání funkcí je binární. Pro funkce $g\colon X \to Y$ a $f\colon A \to B$ jejich složená funkce (složenina) $f \circ g = f(g)\colon X' \to B$ má pro každé $x \in X'$ hodnotu $f(g)(x) = f(g(x))$, přičemž

$$X' = \{x \in X:\ g(x) \in A\}\ (= g^{-1}[A] \subset X)\ .$$

V $f(g)$ mluvíme o g jako o vnitřní funkci a o f jako o vnější funkci.

Úloha 1.3.10 *Nechť funkce f_1 a f_2, resp. g_1 a g_2, jsou shodné podle definice 1.3.3. Je pravda, že i funkce $f_1(g_1)$ a $f_2(g_2)$ jsou shodné?*

Konečně třetí operace na funkcích je vlastně systém unárních operací. Pro zobrazení $f\colon X \to Y$ a libovolnou množinu Z definujeme restrikci (zúžení) funkce f na Z jako funkci $f \mid Z\colon X \cap Z \to Y$, která má pro každé $x \in X \cap Z$ hodnotu

$$(f \mid Z)(x) = f(x)\,.$$

O f pak mluvíme i jako o rozšíření funkce $f \mid Z$. Je celkem jasné, že když f_1 a f_2 jsou shodné funkce s definičním oborem X a množiny Z_1 a Z_2 splňují, že $X \cap Z_1 = X \cap Z_2$, pak i restrikce $f_1 \mid Z_1$ a $f_2 \mid Z_2$ jsou shodné. Funkce (A, B, f) je restrikce funkce (X, Z, g), pokud $f \subset g$, to jest $f = g \mid A = g \mid M(f)$.

Úloha 1.3.11 *Ukažte, že složenina dvou injekcí je injekce a že složenina $f(g)$ surjekcí $g\colon X \to Y$ a $f\colon Y \to B$ je surjekce. Obecně ale složenina dvou surjekcí není surjekce.*

Úloha 1.3.12 *Pro každé tři funkce f, g a h se $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.*

Úloha 1.3.13 *Ukažte, že pro libovolné zobrazení $h\colon X \to Z$ existují množina Y a funkce $g\colon X \to Y$ a $f\colon Y \to Z$, že $h = f \circ g$, g je na a f je prostá.*

Úloha 1.3.14 *Dokažte, že funkce $f\colon X \to Y$ je bijekce, právě když existuje funkce $g\colon Y \to X$, že $f(g)$ je id_Y a $g(f)$ je id_X.*

Úloha 1.3.15 *Kdy lze invertovat konstantní funkci?*

• *Relace ekvivalence.* Relaci $R \subset A \times A$ na množině A nazveme reflexivní (resp. ireflexivní), když vždy aRa (resp. nikdy aRa). R je symetrická, když vždy z aRb plyne, že bRa. Je tranzitivní, když vždy z aRb a bRc plyne, že aRc.

Definice 1.3.16 (relace ekvivalence) *Relace ekvivalence je taková relace na množině, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.*

Definice 1.3.17 (rozklady) *Množina A je rozklad množiny B, pokud prvky množiny A jsou neprázdné, po dvou disjunktní a $\bigcup A = B$. Prvky v A se často nazývají bloky (rozkladu A).*

Pro relaci ekvivalence R na množině A definujeme množiny

$$[a]_R = \{b \in A :\ bRa\}\ (\subset A),\ \ a \in A\,.$$

Říkáme jim bloky (relace R). Je jasné, že když aRb, pak $[a]_R = [b]_R$. Pro relaci ekvivalence R na množině A definujeme množinu

$$A/R = \{[a]_R :\ a \in A\}\,.$$

Úloha 1.3.18 *Je-li R relace ekvivalence na A, pak A/R je rozklad množiny A. Dále platí, že $b, c \in A$ leží v jednom bloku tohoto rozkladu, právě když bRc.*

Pro rozklad X množiny Y definujeme relaci $Y/X = R$ na Y jako

$$xRy \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, Z \in X \big(x,\, y \in Z\big)\ .$$

Úloha 1.3.19 *Je-li X rozkladem množiny Y, pak Y/X je relace ekvivalence na množině Y. Dále platí, že $x, y \in Y$ leží v jednom bloku rozkladu X, právě když $x(Y/X)y$.*

Úloha 1.3.20 *Je-li R relace ekvivalence na A a B je rozklad množiny A, pak*

$$A/(A/R) = R \ \text{ a } \ A/(A/B) = B\ .$$

1.4 Suprema a infima

Relace R na množině A je trichotomická, pokud pro každé $a, b \in A$ platí, že aRb nebo bRa nebo $a = b$.

• *Lineární uspořádání* představují základní matematickou strukturu.

Definice 1.4.1 (lineární uspořádání) *Lineární uspořádání (zkratka* LU*) je ireflexivní, tranzitivní a trichotomická relace na množině.*

Lineární uspořádání na množině A označujeme jako $(A, <)$. Pro $a, b \in A$ pak značení $a \le b$ znamená, že $a < b$ nebo $a = b$, a značení $a > b$ znamená, že $b < a$. Podobně pro $a \ge b$. Relace $<$ a $>$ jsou „ostré“, $\le$ a $\ge$ jsou „neostré“.

Úloha 1.4.2 *Relace $\le$ a $\ge$ jsou reflexivní, tranzitivní a trichotomické.*

Úloha 1.4.3 *Dokažte, že v lineárním uspořádání $(A, <)$ pro každé dva prvky $a, b \in A$ vždy nastává právě jedna z možností $a < b$, $b < a$, $a = b$.*

• *Suprema a infima.* Nechť $(A, <)$ je LU a $B \subset A$. Množina B je shora omezená, když existuje $h \in A$, že pro každé $b \in B$ je $b \le h$. Prvek h pak je horní mez množiny B. Množinu horních mezí množiny B označíme jako $H(B)$ $(\subset A)$. Podobně definujeme omezenost zdola, dolní meze a množinu $D(B)$ $(\subset A)$ dolních mezí množiny B. Prvek $m \in B$ je maximum (největší prvek) množiny B, když je horní mezí množiny B. Podobně se definuje minimum (nejmenší prvek) množiny B. Tyto prvky značíme $\max(B)$ a $\min(B)$. Pro $B = \emptyset$ nejsou definované.

Úloha 1.4.4 *Ukažte, že maxima a minima jsou jednoznačná.*

Úloha 1.4.5 *Každá neprázdná konečná podmnožina lineárního uspořádání má maximum i minimum.*

V teorii reálných čísel hrají základní roli suprema a infima jejich množin.

Definice 1.4.6 (sup a inf) *Nechť* $(A,<)$ *je* LU *a* $B \subset A$. *Prvky*

$$\sup(B) = \min(H(B)) \ (\in A) \ \ a \ \ \inf(B) = \max(D(B)) \ (\in A)\,,$$

pokud existují, nazveme po řadě *<u>supremem</u>* *a* *<u>infimem</u>* *množiny* B.

Na rozdíl od maxima a minima nemusí supremum ani infimum v dané množině ležet. Třeba pro $(A,<) = (\mathbb{R},<)$ s obvyklým lineárním uspořádáním reálných čísel ($(\mathbb{R},<)$ definujeme později, zde předpokládáme jejich intuitivní znalost), $B = [0,1)$ a $B' = [0,1]$, se $\sup(B) = \sup(B') = 1$.

Úloha 1.4.7 *Suprema a infima jsou jednoznačná.*

Úloha 1.4.8 *Dokažte následující tvrzení. Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro infima.*

Tvrzení 1.4.9 (aproximace suprem) *Nechť* $(A,<)$ *je* LU, $B \subset A$ *a* $c \in A$. <u>*Pak*</u> $c = \sup(B) \iff$ *pro každé* $b \in B$ *je* $b \le c$ *a pro každé* $a \in A$ *s* $a < c$ *existuje* $b \in B$, *že* $a < b$.

Prvek $\sup(B)$ tak lze zezdola aproximovat libovolně těsně prvky množiny B.

1.5 Racionální čísla

Reálná čísla jsou vybudována ze zlomků, které teď připomeneme. Ke konstrukcím přirozených a celých čísel se vrátíme v *MA 1*$^+$.

- *Racionální čísla neboli zlomky.* Nechť

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$$

jsou <u>celá čísla</u>, s obvyklými operacemi sčítání $+$ a násobení $\cdot$, s obvyklými neutrálními prvky 0 a 1 a s obvyklým lineárním uspořádáním $<$. Položíme

$$Z = \left\{\tfrac{m}{n} :\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}\,,$$

kde $\frac{m}{n}$ označuje uspořádanou dvojici (m,n). Prvky množiny Z jsou takzvané <u>protozlomky</u>. Relaci <u>shodnosti $\sim$</u> na Z definujeme vztahem

$$\frac{k}{l} \sim \frac{m}{n} \overset{\text{def}}{\iff} kn = lm\,.$$

Úloha 1.5.1 *Dokažte, že* $\sim$ *je relace ekvivalence na* Z.

Definice 1.5.2 (racionální čísla) *Nechť* $\mathbb{Q} \equiv Z/\!\sim$. *Blokům* $[\frac{m}{n}]_\sim \in \mathbb{Q}$ *říkáme* *<u>racionální čísla</u>* *či* *<u>zlomky</u>*. *Často je zapisujeme jednoduše jako* $\frac{m}{n}$ *nebo* m/n.

Díky vnoření $\mathbb{Z} \ni m \mapsto [\frac{m}{1}]_\sim \in \mathbb{Q}$ pohlížíme na celá čísla jako na podmnožinu zlomků.

Pro následující úlohu připomínáme, že čísla $m, n \in \mathbb{Z}$ jsou nesoudělná, když jejich jediné společné dělitele jsou -1 a 1. Protozlomek $\frac{m}{n}$ je v základním tvaru, když $n > 0$ a čísla m a n jsou nesoudělná. Množinu takových protozlomků označíme jako Z_{z} ($\subset Z$).

Úloha 1.5.3 (reprezentanti zlomků) *Existuje právě jedna taková bijekce*

$$f\colon \mathbb{Q} \to Z_{\mathrm{z}}\,,$$

že vždy je $f([m/n]_\sim) \in [m/n]_\sim$.

Zlomky tedy mají (kanonický) systém různých reprezentantů v podobě protozlomků v základním tvaru.

- *Uspořádaná tělesa.* Začneme definicí těles.

Definice 1.5.4 (tělesa) *Těleso X_{T} je algebraická struktura*

$$X_{\mathrm{T}} = (X,\, 0_X,\, 1_X,\, +,\, \cdot)\,,$$

kde X je množina, $0_X, 1_X \in X$ jsou dva různé prvky, $+, \cdot\colon X^2 \to X$ jsou dvě operace na X („sčítání“ a „násobení“) a v níž pro každé $\alpha, \beta, \gamma \in X$ platí následující axiomy. Jednak $\alpha + 0_X = \alpha \cdot 1_X = \alpha$, prvky 0_X a 1_X jsou tedy neutrální k příslušným operacím. Dále platí

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta = \beta + \alpha &\quad \ldots \quad \textit{komutativita operace } +\,, \\
\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha &\quad \ldots \quad \textit{komutativita operace } \cdot\,, \\
(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) &\quad \ldots \quad \textit{asociativita operace } +\,, \\
(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &\quad \ldots \quad \textit{asociativita operace } \cdot \ \textit{ a} \\
\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma) &\quad \ldots \quad \textit{distributivita } \cdot \textit{ vzhledem k } +\,.
\end{aligned}$$

Konečně platí, že

$$\begin{aligned}
\forall\, \alpha\, \exists\, \beta\, \big(\alpha + \beta = 0_X\big) &\quad \ldots \quad \textit{existence aditivních inverzů a} \\
\forall\, \alpha \neq 0_X\, \exists\, \gamma\, \big(\alpha \cdot \gamma = 1_T\big) &\quad \ldots \quad \textit{existence multiplikativních inverzů}\,.
\end{aligned}$$

Aditivní inverz β značíme jako $-\alpha$ a multiplikativní inverz γ jako $\frac{1}{\alpha}$ nebo $1/\alpha$ nebo α^{-1}.

Okruh je algebraická struktura $R_{\mathrm{O}} = (R, 0_R, 1_R, +, \cdot)$ splňující všechny axiomy tělesa, s možnou výjimkou posledního (multiplikativní inverzy nemusí v R_{O} existovat). Například celá čísla $\mathbb{Z}$ tvoří okruh.

Úloha 1.5.5 *V každém tělese je aditivní i multiplikativní neutrální prvek jednoznačně určený. Totéž platí pro aditivní i multiplikativní inverzy.*

Úloha 1.5.6 *Popište nejmenší možné dvouprvkové těleso.*

Definice 1.5.7 (uspořádaná tělesa) *Uspořádané těleso je algebraická struktura* $T_{\mathrm{UT}} = (T, 0_T, 1_T, +, \cdot, <)$*, kde* $(T, 0_T, 1_T, +, \cdot)$ *je těleso,* $(T, <)$ *je* LU *a kde pro každé* $\alpha, \beta, \gamma \in T$ *platí dva axiomy uspořádání, totiž*

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma \quad \ldots \quad \textit{souhra operace } + \textit{ a relace } < \textit{ a}$$
$$\alpha > 0_T \wedge \beta > 0_T \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 0_T \quad \ldots \quad \textit{souhra operace } \cdot \textit{ a relace } < .$$

Úloha 1.5.8 *Každé uspořádané těleso je nekonečné.*

Následující tvrzení dokážeme v *MA 1*$^+$. Tam také připomeneme aritmetiku zlomků, která je čtenářce jistě dobře známa. Připomínáme, že $\sim$ je relace shodnosti protozlomků.

Tvrzení 1.5.9 (o $\mathbb{Q}$) $\mathbb{Q}$ *spolu se svými prvky* $0_{\mathbb{Q}} = [\frac{0}{1}]_\sim$ *a* $1_{\mathbb{Q}} = [\frac{1}{1}]_\sim$*, obvyklými operacemi* $+$ *a* $\cdot$ *a obvyklým lineárním uspořádáním* $<$ *tvoří uspořádané těleso.*

Úloha 1.5.10 $\frac{0}{1} \not\sim \frac{1}{1}$*, takže* $0_{\mathbb{Q}} \neq 1_{\mathbb{Q}}$.

Místo $0_{\mathbb{Q}}$ a $1_{\mathbb{Q}}$ většinou píšeme stručně jen 0 a 1.

• *Neúplnost zlomků.* Zlomky ale postrádají důležitou vlastnost úplnosti, kterou mají reálná čísla. Kvůli ní se reálná čísla definují.

Definice 1.5.11 (úplnost) *Lineární uspořádání je úplné, má-li každá jeho neprázdná a shora omezená podmnožina supremum.*

Úloha 1.5.12 *Co je supremem prázdné množiny? Co je supremem shora neomezené podmnožiny?*

Úloha 1.5.13 *Dokažte, že v úplném uspořádaném tělese každá neprázdná a zdola omezená podmnožina má infimum.*

Úloha 1.5.14 (archimedovskost) *Dokažte, že úplné uspořádané těleso* T_{UT} *je archimedovské, každý prvek* $x \in T$ *má horní mez tvaru*

$$x \leq 1_T + 1_T + \cdots + 1_T \; .$$

Tento termín odkazuje na *Archiméda ze Syrakus (asi 287–asi 212 před naším letopočtem).*

Z následující věty plyne, že lineární uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ není úplné. V jejím důkazu použijeme axiom indukce. V *MA 1*$^+$ uvidíme, že axiom indukce plyne ze základnějších množinových axiomů.

Axiom 1.5.15 (axiom indukce) *Každá neprázdná množina* $B \subset \mathbb{N}$ *má ve standardním lineárním uspořádání* $(\mathbb{N}, <)$ *minimum.*

Věta 1.5.16 ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) *Rovnice $x^2 = 2$ nemá v oboru zlomků řešení.*

Důkaz. Sporem. Nechť pro $a, b \in \mathbb{N}$ se $(a/b)^2 = 2$. Tedy $a^2 = 2b^2$, takže a, b je řešení rovnice $x^2 = 2y^2$. Podle axiomu indukce lze vzít minimální a. Číslo a^2 je sudé, tedy i a je sudé a $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$. Pak ale

$$(2c)^2 = 2b^2 \rightsquigarrow 4c^2 = 2b^2 \rightsquigarrow b^2 = 2c^2 \; .$$

Dostali jsme nové řešení $b, c \in \mathbb{N}$ rovnice $x^2 = 2y^2$. Ale $b < a$, ve sporu s minimalitou řešení a, b. □

Úloha 1.5.17 *Proč je $b < a$? Proč je číslo a sudé? Neměli jsme na začátku důkazu psát spíš $a \in \mathbb{Z}$ & $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$?*

Důsledek 1.5.18 (neúplnost $\mathbb{Q}$) LU $(\mathbb{Q}, <)$ *není úplné. Například množina $X = \{x \in \mathbb{Q} : \; x^2 < 2\}$ ($\subset \mathbb{Q}$) je neprázdná a shora omezená, ale nemá supremum.*

Důkaz. První dvě vlastnosti množiny X jsou jasné, $1 \in X$ a $x < 2$ pro každé $x \in X$. Pro spor nechť $s = \sup(X) \in \mathbb{Q}$. Patrně $s > 0$. Když $s^2 > 2$, existuje zlomek r, že $0 < r < s$ a $(s - r)^2 > 2$. Pak ale pro každé $x \in X$ je $s - r > x$. To je spor s tím, že s je nejmenší horní mez množiny X. Když $s^2 < 2$, existuje zlomek $r > 0$, že $(s + r)^2 < 2$. Tedy $s + r \in X$ a máme spor s tím, že s je horní mez množiny X. Podle trichotomie musí být $s^2 = 2$. To podle předchozí věty není možné. □

Úloha 1.5.19 *Pro zlomky r uveďte nějaké konkrétní hodnoty. Pochopitelně závisejí na zlomku s.*

1.6 Cantorova reálná čísla

Uvedeme Cantorovou definici reálných čísel. V ní je reálné číslo blok Cauchyových posloupností zlomků. Každý tento blok je ale nespočetná množina. V *MA 1*$^+$ popíšeme Dedekindovu konstrukci reálných čísel, v níž každé reálné číslo je dědičně nejvýše spočetná množina. Německý matematik *Georg Cantor (1845–1918)* je tvůrcem teorie množin. Francouzský matematik *Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)* patří k zakladatelům matematické analýzy, zejména té v komplexním oboru. Německý matematik *Richard Dedekind (1831–1916)* učinil v r. 1858 epochální matematický objev, že reálná čísla je možné sestrojit z přirozených čísel pomocí tzv. řezů na množině zlomků.

• *Reálná čísla.* Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ je <u>Cauchyova</u>, když pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že

$$m, \, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq 1/k \; .$$

Budeme pracovat s množinou

$$C = \{(a_n) : \; (a_n) \subset \mathbb{Q} \text{ a je Cauchyova}\} \; .$$

Podobně jako na Z i na množině C definujeme relaci ekvivalence shodnosti $\sim$. Položíme $(a_n) \sim (b_n)$, právě když pro každé k existuje n_0, že

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| \leq 1/k \; .$$

Úloha 1.6.1 *Dokažte, že $\sim$ je relace ekvivalence na C.*

Úloha 1.6.2 *Dokažte, že (a_n) a (b_n) v C jsou shodné, právě když pro každé k existuje n_0, že*

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - b_n| \leq 1/k \; .$$

Definice 1.6.3 (Cantorovo $\mathbb{R}$) *Položíme $\mathbb{R} = C/\sim$. Tuto množinu bloků relace ekvivalence $\sim$ na C nazveme množinou reálných čísel.*

• *Aritmetika reálných čísel.* Reálná čísla nula a jednička jsou $0_{\mathbb{R}} = [(0, 0, \dots)]_\sim$ a $1_{\mathbb{R}} = [(1, 1, \dots)]_\sim$. Součet a součin reálných čísel $[(a_n)]_\sim$ a $[(b_n)]_\sim$ je

$$[(a_n)]_\sim + [(b_n)]_\sim = [(a_n + b_n)]_\sim \;\text{ a }\; [(a_n)]_\sim \cdot [(b_n)]_\sim = [(a_n \cdot b_n)]_\sim \; .$$

Uspořádání na $\mathbb{R}$ definujeme tak, že $[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim$, právě když existují čísla k a n_0, že

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n - 1/k \; .$$

V následujících třech tvrzeních dokážeme korektnost těchto definic. Zřejmě $(0, 0, \dots) \in C$ a $(1, 1, \dots) \in C$, tudíž $0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$.

Tvrzení 1.6.4 (korektnost + a · poprvé) *Nechť (a_n) a (b_n) jsou v C. Pak také $(a_n + b_n)$ a $(a_n b_n)$ jsou v C.*

Důkaz. Nechť $(a_n), (b_n) \in C$ a je dáno k. Pro každé velké m a n je $|a_m - a_n|, |b_m - b_n| \leq 1/2k$. Pro tatáž m a n tedy je

$$|(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| \leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| \leq 1/2k + 1/2k = 1/k$$

a $(a_n + b_n)$ je Cauchyova.

Protože Cauchyova posloupnost je omezená, existuje l, že pro každé n je $|a_n|, |b_n| \leq l$. Pro každé velké m a n je $|a_m - a_n|, |b_m - b_n| \leq 1/2lk$. Pro tatáž m a n tedy je

$$|a_m b_m - a_n b_n| \leq |a_m| \cdot |b_m - b_n| + |b_n| \cdot |a_m - a_n| \leq l/2lk + l/2lk = 1/k$$

a $(a_n b_n)$ je Cauchyova. □

Součet a součin dvou reálných čísel je tedy reálné číslo.

Tvrzení 1.6.5 (korektnost + a · podruhé) *Nechť (a_n), (b_n) a (c_n) jsou v C a $(a_n) \sim (c_n)$. Pak*

$$(a_n + b_n) \sim (c_n + b_n) \;\text{ a }\; (a_n b_n) \sim (c_n b_n) \; .$$

Důkaz. Nechť (a_n), (b_n) a (c_n) jsou, jak uvedeno, a je dáno k. Jako dříve vezmeme l, že pro každé n je $|b_n| \le l$. Pro každé velké n je $|a_n - c_n| \le 1/k$. Pro tato n je

$$|(a_n + b_n) - (c_n + b_n)| = |a_n - c_n| \le 1/k$$

a $(a_n + b_n) \sim (c_n + b_n)$. Pro každé velké n je též $|a_n - c_n| \le 1/lk$. Tedy

$$|a_n b_n - c_n b_n| = |a_n - c_n| \cdot |b_n| \le l/lk = 1/k$$

a $(a_n b_n) \sim (c_n b_n)$. □

Odtud plyne, že pokud (a_n), (a'_n), (b_n) a (b'_n) jsou v C a $(a_n) \sim (a'_n)$ a $(b_n) \sim (b'_n)$, pak

$$[(a_n + b_n)]_\sim = [(a'_n + b'_n)]_\sim \text{ a } [(a_n b_n)]_\sim = [(a'_n b'_n)]_\sim \, .$$

Součet ani součin v $\mathbb{R}$ tedy nezávisí na reprezentujících posloupnostech.

Tvrzení 1.6.6 (korektnost uspořádání) *Nechť (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) jsou v C, $(a_n) \sim (c_n)$ a $(b_n) \sim (d_n)$. Pak*

$$[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim \iff [(c_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim \iff [(a_n)]_\sim < [(d_n)]_\sim \, .$$

Důkaz. Nechť (a_n), (b_n), (c_n) a (d_n) jsou, jak uvedeno. Nechť platí první srovnání, takže pro nějaké k a každé velké n je $a_n \le b_n - 2/k$. Pro každé velké n je také $|a_n - c_n| \le 1/k$. Pro každé velké n tak

$$c_n \le a_n + 1/2k \le b_n - 2/k + 1/k = b_n - 1/k$$

a $[(c_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim$. Nechť platí druhé srovnání, takže pro nějaké k a každé velké n je $c_n < b_n - 2/k$. Pak opět pro každé velké n

$$a_n \le c_n + 1/k \le b_n - 2/k + 1/k = b_n - 1/k$$

a $[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim$. Ekvivalence $[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim \iff [(a_n)]_\sim < [(d_n)]_\sim$ se dokazuje podobně. □

Odtud plyne, že pokud (a_n), (a'_n), (b_n) a (b'_n) jsou v C a $(a_n) \sim (a'_n)$ a $(b_n) \sim (b'_n)$, pak

$$[(a_n)]_\sim < [(b_n)]_\sim \iff [(a'_n)]_\sim < [(b'_n)]_\sim \, .$$

Porovnání dvou reálných čísel tedy nezávisí na reprezentujících posloupnostech.

Aritmetiku reálných čísel tak máme korektně definovanou. Dokážeme, že v ní reálná čísla tvoří uspořádané těleso. Začneme tím, že tvoří okruh.

Tvrzení 1.6.7 ($\mathbb{R}$ je okruh) $\mathbb{R}_{\mathrm{O}} = (\mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ *je okruh.*

Důkaz. Odvodíme to z faktu, že $\mathbb{Q}_{\mathrm{O}} = (\mathbb{Q}, 0_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, +, \cdot)$ je okruh. Ten vezmeme teď jako daný, dokážeme ho v *MA 1*$^+$. Nechť $Q = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ je množina všech posloupností $(a_n) \subset \mathbb{Q}$. Vezmeme algebraickou strukturu

$$Q_{\mathrm{O}} = (Q,\, 0_Q,\, 1_Q,\, +,\, \cdot)\ ,$$

kde $0_Q = (0_{\mathbb{Q}}, 0_{\mathbb{Q}}, \dots)$, $1_Q = (1_{\mathbb{Q}}, 1_{\mathbb{Q}}, \dots)$ a součet a součin jsou definovány po složkách,

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \text{ a } (a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)\ .$$

Patrně Q_{O} je okruh — každá souřadnice je okruh $\mathbb{Q}_{\mathrm{O}}$ a splnění axiomů okruhu v každé souřadnici implikuje jejich splnění v Q_{O}.

Ovšem $C \subset Q$ a výše jsme dokázali, že množina C je uzavřená na konstantní operace 0_Q a 1_Q a na binární operace sčítání a násobení po složkách. Takže $C_{\mathrm{O}} = (C, 0_Q, 1_Q, +, \cdot)$ je podokruh okruhu Q_{O}. Reálná čísla sebou nesou surjekci

$$F\colon C \to \mathbb{R},\quad F(a_n) = F((a_n)) = [(a_n)]_\sim\ ,$$

v níž $F(a_n) = F(b_n)$, právě když $(a_n) \sim (b_n)$. Výše v tvrzeních 1.6.4 a 1.6.5 jsme dokázali, že operace $+$ a $\cdot$ v C_{O} se pomocí F zvednou na operace v $\mathbb{R}_{\mathrm{O}}$. Axiomy okruhu se tím zachovají, takže $\mathbb{R}_{\mathrm{O}}$ tvoří okruh. $\square$

$\mathbb{Q}_{\mathrm{O}}$ je těleso, ale ani Q_{O} ani C_{O} není těleso. Třeba rovnost

$$(0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, \dots) \cdot (1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \dots) = (0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, \dots) = 0_Q\ ,$$

ukazuje, že v C_{O} součin dvou nenulových prvků může být nula. Teď ale dokážeme, že zvednutím násobení pomocí F do $\mathbb{R}_{\mathrm{O}}$ dostaneme těleso, dokonce uspořádané.

Věta 1.6.8 ($\mathbb{R}$ je UT) *Výše definovaná algebraická struktura*

$$\mathbb{R}_{\mathrm{UT}} = (\mathbb{R},\, 0_{\mathbb{R}},\, 1_{\mathbb{R}},\, +,\, \cdot,\, <)$$

je uspořádané těleso.

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ okruh. Zbývá dokázat, že (i) v $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ existují multiplikativní inverzy, že (ii) $(\mathbb{R}, <)$ je LU a že (iii) v $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ platí oba axiomy uspořádání.

(i) Nechť $\alpha = [(a_n)]_\sim \in \mathbb{R}$ je nenulové číslo, takže $(a_n) \not\sim (0, 0, \dots)$. Tedy $|a_n| \ge 2/l$ pro nějaké l a nekonečně mnoho n. Protože $(a_n) \in C$, je $|a_n| \ge 1/l$ pro každé velké n. Definujeme $b_n = 1/a_n$ pro $a_n \ne 0$ a $b_n = 0$ pro $a_n = 0$. Ukážeme, že $(b_n) \in C$. Pro dané k pro každé velké m a n je $|a_m - a_n| \le 1/l^2k$. Pro každé velké m a n pak je

$$|b_m - b_n| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_m a_n|} \le \frac{l^2}{l^2 k} = \frac{1}{k}$$

a $(b_n) \in C$. Položíme $\beta = [(b_n)]_\sim \in \mathbb{R}$ a dostaneme, že $\alpha \cdot \beta = 1_{\mathbb{R}}$, protože $(a_n b_n) \sim (1, 1, \dots)$. Tedy $\beta = \alpha^{-1}$.

(ii) Ireflexivita a tranzitivita relace $<$ jsou vidět hned. Dokážeme její trichotomii. Nechť $\alpha = [(a_n)]_\sim$ a $\beta = [(b_n)]_\sim$ jsou dvě různá reálná čísla. Tedy $(a_n) \not\sim (b_n)$ a například $a_n - b_n \geq 2/k$ pro nějaké k a nekonečně mnoho n; druhá možnost s $a_n - b_n \leq -2/k$ se řeší podobně. Protože $(a_n), (b_n) \in C$, je $a_n - b_n \geq 1/k$ pro každé velké n. Tedy $b_n \leq a_n - 1/k$ pro tato n a $\beta < \alpha$.

(iii) Nechť $\alpha = [(a_n)]_\sim$, $\beta = [(b_n)]_\sim$ a $\gamma = [(c_n)]_\sim$ jsou tři reálná čísla. Pokud $\alpha < \beta$, pak $a_n \leq b_n - 1/k$ pro nějaké k a každé velké n. Pak i $a_n + c_n \leq b_n + c_n - 1/k$ pro tato n a $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$. Pokud $0_\mathbb{R} < \alpha, \beta$, je $1/\sqrt{k} \leq a_n, b_n$ pro nějaké k a každé velké n. Pak $1/k \leq a_n b_n$ pro tato n a tedy $0_\mathbb{R} < \alpha\beta$. Oba axiomy uspořádání tak platí. □

$\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ v sobě přirozeným způsobem obsahuje $\mathbb{Q}_{\mathrm{UT}}$.

Definice 1.6.9 (racionální reálná čísla) *Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ je racionální, pokud $\alpha = [(a, a, \dots)]_\sim$ pro nějaké $a \in \mathbb{Q}$. Číslo $[(a, a, \dots)]_\sim$ označíme jako $\overline{a}$.*

Úloha 1.6.10 *Dokažte, že zobrazení $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(a) = \overline{a}$, je izomorfismus $\mathbb{Q}_{\mathrm{UT}}$ s uspořádaným podtělesem racionálních reálných čísel v $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$.*

Pokud tedy chceme pracovat se zlomkem a jako s reálným číslem, chápeme ho jako racionální reálné číslo $\overline{a}$.

• *Princip neostrých nerovností.* V definicích a algebraických úpravách v UT $\mathbb{R}$ jsme se snažili a budeme se snažit systematicky používat, kdykoli to je možné, neostré nerovnosti $\leq$ a $\geq$ místo ostrých $<$ a $>$. Například výše v definici LU na $\mathbb{R}$ jsme místo $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n - 1/k$ napsali $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n - 1/k$. Důvodem naší preference neostrých nerovností je fakt, že pro $x, y \in \mathbb{R}$ se nerovnost $x \leq y$ po vynásobení nezáporným reálným číslem $z \geq 0$ zachová, ale ostrá nerovnost $x < y$ se zachovat nemusí.

Úloha 1.6.11 *Proč?*

Neostré nerovnosti jsou tedy „bezpečnější“ než ostré.

• *Úplnost reálných čísel.* Rozšířením zlomků do reálných čísel získáme úplnost. V příštím oddílu ale uvidíme, čím se za to platí. V důkazu úplnosti $\mathbb{R}$ použijeme následující zajímavý výsledek.

Věta 1.6.12 (pravěta o limitě monotónní posloupnosti) *Nechť $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq b$ jsou zlomky. Pak (a_n) je Cauchyova posloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ a $b \in \mathbb{Q}$ jsou, jak uvedeno. Pro každé dva indexy $m \leq n$ pak je $0 \leq a_m - a_n \leq a_1 - b$. Kdyby (a_n) nebyla Cauchyova, existovalo by k a taková posloupnost přirozených čísel $m_0 < m_1 < \dots$, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ je $a_{m_i} - a_{m_{i-1}} \geq 1/k$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ s $n/k > a_1 - b$ pak dostáváme spor, že $a_{m_n} - a_{m_0} = \sum_{i=1}^{n}(a_{m_i} - a_{m_{i-1}}) \geq \frac{n}{k} > a_1 - b$. □

Nerostoucí a zdola omezená posloupnost zlomků tak vždy definuje reálné číslo. Tato forma věty 2.3.3 o limitě monotónní posloupnosti (reálných čísel) funguje, i když ještě není dokázána úplnost $\mathbb{R}$. Dokonce pro ni ani nepotřebujeme $\mathbb{R}$.

Úloha 1.6.13 *Zformulujte a dokažte tuto větu pro případ neklesající posloupnosti zlomků.*

Dokážeme úplnost $\mathbb{R}$.

Věta 1.6.14 (úplnost $\mathbb{R}$) *Lineární uspořádání* $(\mathbb{R}, <)$ *je úplné.*

Důkaz. Nechť množina $B \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a shora omezená. Induktivně definujeme dvě posloupnosti racionálních reálných čísel $(\overline{a_n}), (\overline{b_n}) \subset \mathbb{R}$. Na začátku $\overline{a_1} \in \mathbb{R}$ je libovolná racionální horní mez množiny B a $b_1 = \overline{1}$. Nechť $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$ a $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ jsou už definované. Je-li $\overline{a_n} - \overline{b_n}$ horní mez množiny B, položíme $\overline{a_{n+1}} = \overline{a_n} - \overline{b_n}$ a $\overline{b_{n+1}} = \overline{b_n}$. Pokud není horní mezí, takže $\beta > \overline{a_n} - \overline{b_n}$ pro nějaké $\beta \in B$, položíme $\overline{a_{n+1}} = \overline{a_n}$ a $\overline{b_{n+1}} = \overline{b_n}/\overline{2}$. Tuto proceduru opakujeme. Získaná posloupnost $(\overline{a_n})$ je nerostoucí a každý její člen je horní mez množiny B. Díky $B \neq \emptyset$ je $(\overline{a_n})$ zdola omezená. Tedy (úloha 1.6.10) $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ je nerostoucí a zdola omezená posloupnost. Podle věty 1.6.12 je $(a_n) \in C$. Ukážeme, že $\alpha = [(a_n)]_\sim = \sup(B)$.

Nechť $\alpha < \beta = [(c_n)]_\sim \in B$. Pak $a_n \le c_n - 1/k$ pro nějaké k a každé velké n. Protože $(c_n) \in C$, můžeme vzít m, že pro každé velké n je $a_m \le c_n - 1/2k$. Pak ale $\overline{a_m} < \beta$, což nelze ($\overline{a_n}$ jsou horní meze množiny B). Pro každé $\beta \in B$ je tedy $\alpha \ge \beta$ a α je horní mez množiny B. Nechť $\gamma \in \mathbb{R}$ s $\gamma < \alpha$. Díky $B \neq \emptyset$ se krok půlení $\overline{b_n}$ provede nekonečněkrát a tedy existují m a $\beta \in B$, že $\beta > \overline{a_m} - \overline{b_m} \ge \alpha - (\alpha - \gamma) = \gamma$ a $\beta > \gamma$. Tedy α je nejmenší horní mez B. $\square$

Podle úlohy 1.5.14 je uspořádané těleso $\mathbb{R}_{\mathrm{UT}}$ archimedovské. Z definice $(\mathbb{R}, <)$ to ale plyne přímo a jednodušeji, úplnost $\mathbb{R}$ se nepotřebuje.

Důsledek 1.6.15 ($\sqrt{2} \in \mathbb{R}$) *Rovnice $x^2 = 2$ má v oboru reálných čísel řešení.*

Důkaz. Vezmeme množinu $X = \{a \in \mathbb{R} :\ a^2 < 2\}$. Podle věty 1.6.14 existuje supremum $s = \sup(X) \in \mathbb{R}$. Stejné argumenty jako v důkazu důsledku 1.5.18 ukazují, že nenastává ani $s^2 < 2$ ani $s^2 > 2$. Tedy $s^2 = 2$. $\square$

Zobecníme to v následující větě, kterou dokážeme později v důsledku 6.3.7. Spojitost funkce znamená — později to definujeme přesně — že malá změna jejího argumentu způsobí malou změnu její hodnoty.

Věta 1.6.16 (Bolzano–Cauchyova) *Nechť $a \le b$ jsou v $\mathbb{R}$ a $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je taková spojitá funkce, že $f(a)f(b) \le 0$. Potom existuje číslo $c \in [a, b]$, že $f(c) = 0$.*

Bernard Bolzano (1781–1848) byl česko-italsko-německý kněz, filosof a matematik.

1.7 Spočetné a nespočetné množiny

Začneme definicí konečných a nekonečných množin.

• *Konečné a nekonečné množiny.* Množinu $\mathbb{N}$ přirozených čísel máme dánu a konečnost, resp. nekonečnost, množiny X definujeme pomocí zobrazení z $\mathbb{N}$ do X.

Definice 1.7.1 ((ne)konečnost) *X je nekonečná množina, existuje-li prostá funkce $f\colon \mathbb{N} \to X$. Když X není nekonečná, je konečná.*

Úloha 1.7.2 *Pro každou konečnou množinu X existuje surjekce $f\colon \mathbb{N} \to X$.*

Úloha 1.7.3 *Pro každou konečnou X existuje $n \in \mathbb{N}_0$ a bijekce $f\colon [n] \to X$.*

• *Spočetné a nespočetné množiny.* Dostáváme se k velkým množinám.

Definice 1.7.4 (nespočetné množiny) *Definujeme následující množiny.*

1. *Množina X je spočetná, když existuje bijekce $f\colon \mathbb{N} \to X$.*
2. *Množina X je nejvýše spočetná, je-li konečná nebo spočetná.*
3. *Množina X je nespočetná, když není nejvýše spočetná.*

$\mathbb{N}$ je patrně spočetná množina. Existují ale nějaké nespočetné množiny? Už jsme prozradili, že každé reálné číslo $[(a_n)]_\sim$ je nespočetná množina. Za chvíli dokážeme, že i $\mathbb{R} = C/\sim$ je nespočetná množina.

Věta 1.7.5 (spočetnost $\mathbb{Q}$) *Množina zlomků $\mathbb{Q}$ je spočetná.*

Důkaz. Připomeňme si, že Z_z ($\subset Z$) jsou protozlomky $\frac{m}{n}$ v základním tvaru. Podle úlohy 1.5.3 stačí ukázat, že Z_z je spočetná. Pro $\frac{m}{n} \in Z_\mathrm{z}$ definujeme normu $\|\frac{m}{n}\| = |m| + n \in \mathbb{N}$ a seznamy

$$Z(j) = \big(z_{1,j} < z_{2,j} < \cdots < z_{k_j,j} :\ z_{i,j} \in Z_\mathrm{z},\ \|z_{i,j}\| = j\big),\ j \in \mathbb{N}\,.$$

Například

$$Z(5) = \big(\tfrac{-4}{1} < \tfrac{-3}{2} < \tfrac{-2}{3} < \tfrac{-1}{4} < \tfrac{1}{4} < \tfrac{2}{3} < \tfrac{3}{2} < \tfrac{4}{1}\big) \text{ a } k_5 = 8\,.$$

Zde $\frac{0}{5} \notin Z(5)$, protože protozlomek $\frac{0}{5}$ není v základním tvaru. Patrně $j \ne j'$ $\Rightarrow Z(j) \cap Z(j') = \emptyset$, každá $Z(j)$ je konečná a neprázdná a $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Z(j) = Z_\mathrm{z}$. Zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to Z_\mathrm{z}$ definujeme jako

$$f(1) = z_{1,1},\ f(2) = z_{2,1},\ \ldots, f(k_1) = z_{k_1,1},\ f(k_1+1) = z_{1,2},\ \ldots$$

— hodnoty funkce f nejprve projdou k_1 seřazených protozlomků v $Z(1)$, pak k_2 seřazených protozlomků v $Z(2)$, a tak dál. Obecná hodnota je pro $j \in \mathbb{N}$ rovna

$$f(k_1 + k_2 + \cdots + k_{j-1} + i) = z_{i,j},\ \ i \in [k_j]\,,$$

kde pro $j = 1$ tento argument funkce f definujeme jako i. Lehce se vidí, že f je bijekce. □

Úloha 1.7.6 *Dokažte, že množina* $\mathbb{Z}$ *celých čísel je spočetná.*

• *Cantorova věta.* Nespočetnost množiny $\mathbb{R}$ plyne ze základní věty o množinách pocházející od G. Cantora: potence $\mathcal{P}(X) = \{A : \ A \subset X\}$ je mnohem větší množina než X.

Věta 1.7.7 (Cantorova) *Neexistuje surjekce* $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ *z množiny na její potenci.*

Důkaz. Nechť X je množina a $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ je libovolná funkce. Získáme z ní takovou množinu Y, že (i) $Y \subset X$ a (ii) $Y \not\in f[X]$. Tedy f není na. Položíme $Y = \{x \in X : \ x \not\in f(x)\}$. Pak (i) jistě platí. Řekněme, že pro nějaké $y \in X$ se $f(y) = Y$. To vede ke sporu: pokud $y \in Y$, je $y \not\in f(y) = Y$, a pokud $y \not\in Y = f(y)$, je $y \in Y$. Takže platí i (ii). □

Úloha 1.7.8 *Nechť* $X = \emptyset$. *Co je* Y*?*

Úloha 1.7.9 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 1.7.10 (prostá Cantorova věta) *Neexistuje injekce* $f\colon \mathcal{P}(X) \to X$ *z potence množiny do ní.*

Jako $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ označíme množinu (všech) posloupností $(a_n) \subset \{0,1\}$. Je to nespočetná množina.

Důsledek 1.7.11 (o $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$**)** *Neexistuje surjekce* $f\colon \mathbb{N} \to \{0,\,1\}^{\mathbb{N}}$.

Důkaz. Zobrazení $g\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $g((a_n)) = \{n \in \mathbb{N} : \ a_n = 1\}$, je patrně bijekce. Kdyby existovala uvedená surjekce f, složenina $g \circ f$ by byla funkce z $\mathbb{N}$ na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, což je v rozporu s větou 1.7.7. □

Úloha 1.7.12 *Dokažte, že* g *je bijekce.*

• *Rozvoje.* Reálná čísla v definici 1.6.3 jsou teoretická. Prakticky je zapisujeme jako „nekonečné“ desetinné rozvoje.

Definice 1.7.13 (rozvoje) *(Nekonečným desetinným)* <u>*rozvojem*</u> ρ *rozumíme každou takovou posloupnost*

$$\rho = a_n\, a_{n-1}\, \ldots\, a_0 \,.\, a_{-1}\, a_{-2}\, \ldots\ ,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \{+,-\}$, *pro každé* $m \le n-1$ *je* $a_m \in \{0,1,\ldots,9\}$ *a když* $a_{n-1} = 0$, *pak* $n = 1$.

Například v rozvoji čísla $\pi = 3.1415\ldots$ je $n = 1$, $a_1 = +$, $a_0 = 3$, $a_{-1} = 1$, $a_{-2} = 4$ a tak dál (znaménko $+$ se v konvenčním zápisu vypouští). Množina rozvojů je R. Je dobře známá korespondence $F\colon R \to \mathbb{R}$, v níž $F(\rho)$ je

$$\big[\big(\varepsilon a_{n-1}10^{n-1},\ \varepsilon(a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2}),\\ \varepsilon(a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + a_{n-3}10^{n-3}),\ \ldots\big)\big]_{\sim}$$

s $\varepsilon = 1$ pro $a_n = +$ a $\varepsilon = -1$ pro $a_n = -$. Devítkový rozvoj ρ má maximální nekonečný úsek cifer $a_m = a_{m-1} = a_{m-2} = \cdots = 9$, přičemž začátek úseku $m \in \mathbb{N}_0$ je jednoznačně určený podmínkou, že buď $m = n-1$, anebo $m < n-1$ a $a_{m+1} < 9$. Následník devítkového rozvoje vznikne přepsáním devítek v tomto úseku na nuly a pak když $m < n-1$ zvětšením cifry a_{m+1} o 1, a když $m = n-1$ předřazením cifry 1 a zvětšením n o 1. Znaménko a ostatní cifry se zachovají.

Definice 1.7.14 (sdružené rozvoje) *Dva rozvoje $\rho \ne \rho'$ jsou sdružené, pokud buď $\{\rho, \rho'\} = \{+0.000\ldots, -0.000\ldots\}$, anebo jde o devítkový rozvoj a jeho následníka.*

Úloha 1.7.15 *Dokažte, že dvojic sdružených rozvojů je spočetně mnoho.*

Příklady posledně zmíněných sdružených rozvojů jsou

$$\{-23.56999\ldots,\ -23.57000\ldots\} \text{ a } \{+999.999\ldots,\ +1000.000\ldots\}\,.$$

Jiným příkladem jsou známé „paradoxní“ — viz [1] — sdružené rozvoje

$$\{\kappa,\ \kappa'\} = \{+0.999\ldots,\ +1.000\ldots\}\,.$$

Podle následující věty se $F(\kappa) = F(\kappa') = 1_{\mathbb{R}}$, i když $\kappa \ne \kappa'$.

Věta 1.7.16 (R a $\mathbb{R}$) *$F\colon R \to \mathbb{R}$ je na a $F(\rho) = F(\rho') \iff \rho = \rho'$ nebo $\{\rho, \rho'\}$ jsou sdružené rozvoje.*

Tuto větu dokážeme v *MA 1*$^+$.

- *Nespočetnost* $\mathbb{R}$. Dokážeme, že reálná čísla jsou nespočetná.

Důsledek 1.7.17 (daň za úplnost) *Neexistuje funkce z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{R}$. Reálná čísla tvoří nespočetnou množinu.*

Důkaz. Prvky v $\mathbb{R}$ bereme podle předešlé věty jako rozvoje. Vezmeme množinu rozvojů

$$X = \{+0\,.\,a_{-1}\,a_{-2}\,\ldots\,a_{-m}\,\cdots\colon\ a_{-m} \in \{0,\,1\},\ m \in \mathbb{N}\}\,.$$

Zúžení $F \,|\, X$ je díky poslední větě prosté. Pro $y \in Y = F[X] \subset \mathbb{R}$ označíme jako $F^{-1}(y)$ to jediné $x \in X$, že $F(x) = y$. Tedy $F^{-1}\colon Y \to X$ je bijekce.

Pro spor nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je na. Tedy máme surjekci $f_0\colon \mathbb{N} \to Y$. Zřejmě také máme bijekci $g\colon X \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Ve sporu s důsledkem 1.7.11 tak máme surjekci

$$h = g(F^{-1}(f_0))\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}\,.$$

□

Úloha 1.7.18 *Proč máme surjekci f_0? Proč máme bijekci g? Proč je funkce h surjekce?*

Nespočetností $\mathbb{R}$ se zabývá článek [9]. Vychází z duální formulace, že neexistuje injekce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{N}$.

Kapitola 2

Přednáška 2. Existence limit posloupností

V oddílu 2.1 kapitoly doplňující druhou přednášku

https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred2.pdf

z 29. 2. 2024 zavedeme aritmetiku nekonečen a rozšířenou reálnou osu

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\,.$$

V tvrzení 2.1.7 dokážeme, že v $(\mathbb{R}^*, <)$ má každá podmnožina infimum i supremum. Věty 2.1.9 a 2.1.10 podrobně popisují aritmetiku nekonečen. Definujeme okolí bodů a nekonečen. Hlavní definice 2.1.16 zavádí současně vlastní i nevlastní limitu reálné posloupnosti. Definice 2.1.17 zavádí robustnost vlastností posloupností.

Oddíl 2.2 je věnován hlavně podposloupnostem. Věta 2.2.5 uvádí, že každá reálná posloupnost má podposloupnost s limitou, a pomocí podposloupností charakterizuje situace, kdy limita posloupnosti vůbec neexistuje, popřípadě se nerovná zadanému prvku $A \in \mathbb{R}^*$. V tvrzení 2.2.10 spočítáme, že $\lim n^{1/n} = 1$. Potřebujeme k tomu binomickou větu, kterou připomeneme v úloze 2.2.9.

Oddíl 2.3 obsahuje pět vět o existenci limit reálných posloupností. Podle věty 2.3.3 každá monotónní posloupnost má limitu. Ve větě 2.3.9 to zobecníme na kvazimonotónní posloupnosti. Bolzano–Weierstrassova věta 2.3.15 praví, že každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost. Věta 2.3.20 o Cauchyově podmínce ukazuje, že pro reálné posloupnosti je konvergence ekvivalentní cauchyovosti. Podle Feketeho lemmatu ve větě 2.3.25 subaditivita i superaditivita reálné posloupnosti (a_n) zaručuje existenci limity $\lim a_n/n$.

2.1 Nekonečna, okolí, limity

• *Značení.* Připomeňme si logické a množinové značení. Dále značení $\mathbb{R}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ a $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$. Písmena i, j, k, l, m, m_0, m_1, $\ldots$ a n, n_0, n_1, $\ldots$, případně s čárkami, označují přirozená čísla a a, b, c, d, e, δ, ε a θ, případně s indexy a čárkami, jsou reálná čísla, přičemž δ, ε a θ jsou vždy kladná. O prvcích $\mathbb{R}$ mluvíme jako o (reálných) číslech či jako o bodech (na reálné ose). Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je vlastně funkce $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Množiny reálných čísel obvykle označujeme písmeny M a N a mluvíme o nich jako o reálných množinách.

Úloha 2.1.1 *Negujte výrok*

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta\ \forall\, a,\, b \in M\ \big(|a-b| < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon\big)\ .$$

Úloha 2.1.2 (trojúhelníková nerovnost) *Pro každá reálná čísla a_1, a_2, …, a_n ($n \in \mathbb{N}$) platí, že*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\ .$$

Stručně mluvíme o $\underline{\Delta}$-ové nerovnosti. Věta 4.1.19 je její nekonečná verze.

• *Počítání s nekonečny.* Pro definici nevlastních limit přidáme k $\mathbb{R}$ dva nové různé prvky, nekonečna $+\infty$ a $-\infty$. Dostaneme tak rozšířenou reálnou osu

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}\ .$$

Prvky v $\mathbb{R}^*$ značíme A, B, K a L. V následující definici se předpokládá, že aritmetika v $\mathbb{R}$ je známa. Volit shodná znaménka nekonečen (či jiných symbolů) znamená volit v daném výrazu u daných k nekonečen $\pm\infty$ buď všechna horní znaménka, anebo všechna dolní znaménka. Volba nezávislých znamének znamená volit všech 2^k možností znamének.

Definice 2.1.3 (aritmetika v $\mathbb{R}^*$) *Nechť N a N' jsou nekonečna. Pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ definujeme $N + A = A + N = N$, kromě výrazů $+\infty + (-\infty)$ a $-\infty + (+\infty)$, které jsou neurčité (nedefinované). Dále pro každé $A \neq 0$ položíme s příslušnými znaménky $N \cdot A = A \cdot N = N'$. Výrazy $0 \cdot N$ a $N \cdot 0$ jsou neurčité. Pro každé $b \in \mathbb{R}$ položíme $b/N = 0$ a s příslušnými znaménky $N/b = N'$ ($b \neq 0$). Výrazy $A/0$ a N/N' jsou neurčité. Definujeme $-(\pm\infty) = \mp\infty$. Konečně $(\mathbb{R}, <)$ rozšíříme o srovnání $-\infty < +\infty$ a $-\infty < b < +\infty$, $b \in \mathbb{R}$. Neurčité výrazy tedy jsou, se shodnými znaménky a $A \in \mathbb{R}^*$,*

$$\frac{A}{0},\ (\pm\infty) + (\mp\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\ \ a\ \ \frac{\pm\infty}{\mp\infty}\ .$$

Ani aditivní ani multiplikativní inverz nekonečna tak není definovaný, třebaže $-(\pm\infty) = \mp\infty$ a $1/\pm\infty = 0$. „Příslušná znaménka“ jsou dána pravidlem, že součin a podíl stejných (resp. různých) znamének je znaménko $+$ (resp. $-$).

Definice 2.1.4 (odečítání) *Rozdíl prvků $A, B \in \mathbb{R}^*$ definujeme jako*

$$A - B = A + (-1) \cdot B = A + (-B)\ .$$

Úloha 2.1.5 *Spočtěte hodnoty* $\frac{-\infty}{-2}$, $(-\infty) - (+\infty)$, $-\infty + 10$ *a* $\frac{+\infty}{0}$.

Úloha 2.1.6 $(\mathbb{R}^*, <)$ *je lineární uspořádání.*

Následující tvrzení a dvě věty popisují aritmetiku nekonečen.

Tvrzení 2.1.7 (inf a sup v $\mathbb{R}^*$) *V lineárním uspořádání* $(\mathbb{R}^*, <)$ *má každá množina* $X \subset \mathbb{R}^*$ *infimum i supremum.*

Důkaz. Dokážeme existenci $\sup(X)$. Pro infimum je argument podobný. $H(X)$ $(\subset \mathbb{R}^*)$ je množina horních mezí množiny X. Pro $X = \emptyset$ se $H(\emptyset) = \mathbb{R}^*$ a

$$\sup(\emptyset) = \min(H(\emptyset)) = \min(\mathbb{R}^*) = -\infty \ .$$

Pro $X = \{-\infty\}$ se $H(\{-\infty\}) = \mathbb{R}^*$ a opět

$$\sup(\{-\infty\}) = \min(H(\{-\infty\})) = \min(\mathbb{R}^*) = -\infty \ .$$

Pro $+\infty \in X$ se $H(X) = \{+\infty\}$ a

$$\sup(X) = \min(H(X)) = \min(\{+\infty\}) = +\infty \,.$$

Zbývá případ, že $X \neq \emptyset, \{-\infty\}$ a $+\infty \notin X$. Nechť $X' = X \setminus \{-\infty\}$. Pak $X' \neq \emptyset$ a $X' \subset \mathbb{R}$. Když X' není v LU $(\mathbb{R}, <)$ shora omezená, potom $H(X) = \{+\infty\}$ a

$$\sup(X) = \min(H(X)) = \min(\{+\infty\}) = +\infty \ .$$

Konečně pokud X' je v LU $(\mathbb{R}, <)$ shora omezená, pak supremum

$$\sup_{(\mathbb{R}^*, <)}(X) = \sup_{(\mathbb{R}, <)}(X') \in \mathbb{R}$$

existuje díky úplnosti $(\mathbb{R}, <)$, viz věta 1.6.14. □

Úloha 2.1.8 *Nalezněte všechny množiny* $X \subset \mathbb{R}^*$, *pro něž* $\sup(X) = -\infty$.

Následující věta popisuje, které axiomy uspořádaného tělesa v $\mathbb{R}^*$ platí.

Věta 2.1.9 (axiomy UT v $\mathbb{R}^*$) *S výjimkou dvou axiomů existence inverzního prvku a axiomu uspořádání*

$$A < B \Rightarrow A + K < B + K \ ,$$

splňuje algebraická struktura $(\mathbb{R}^*, 0, 1, +, \cdot, <)$ *všechny ostatní axiomy* UT *v těch případech, kdy daný aritmetický výraz je definovaný.*

Důkaz. Ukážeme, že kromě tří uvedených axiomů přidání nekonečen ostatní axiomy nenarušilo, jen některé aritmetické výrazy nejsou definované. Neutralita 0 i neutralita 1 podle definice 2.1.3 stále platí. Definice 2.1.3 rovněž ukazuje, že platí i komutativita obou operací: pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ se buď

$$A + (\pm\infty) = \pm\infty + A \ \text{ a } \ A \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot A\ ,$$

se shodnými znaménky, anebo obě strany rovnosti jsou nedefinované, zkratkou OSRJN. Prověříme asociativitu. Pro $A, B, K \in \mathbb{R}^*$ prověřme rovnosti

$$(A + B) + K \stackrel{?}{=} A + (B + K) \ \text{ a } \ (A \cdot B) \cdot K \stackrel{?}{=} A \cdot (B \cdot K)\ .$$

Začneme sčítáním. Je-li právě jeden z prvků A, B a K nekonečno, pak rovnost platí a na obou jejích stranách je toto nekonečno. Jsou-li právě dva prvky nekonečna, pak pro shodná znaménka rovnost platí a na obou stranách je toto nekonečno, jinak OSRJN. Jsou-li všechny tři prvky nekonečna, pak pro shodná znaménka rovnost platí a na obou stranách je toto nekonečno, jinak OSRJN.

Přejdeme k násobení. Je-li alespoň jeden z prvků A, B a K nekonečno a žádný není nula, pak rovnost platí a na obou jejích stranách je nekonečno se znaménkem rovným součinu znamének prvků A, B a K. Je-li alespoň jeden z prvků A, B a K nekonečno a jiný je nula, pak OSRJN.

Podíváme se na distributivní zákon

$$A \cdot (B + K) \stackrel{?}{=} (A \cdot B) + (A \cdot K)\ .$$

Nechť A je nekonečno. Pokud součet $B+K$ není definovaný, pak OSRJN, protože i napravo máme součet nekonečen s různými znaménky. Pokud prvky B a K mají různá znaménka nebo jeden z nich je nula, pak pravá strana není definovaná. Mají-li stejná znaménka, pak rovnost platí a na obou stranách je nekonečno se znaménkem rovným součinu znamének prvků A a $B + K$. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a B nebo K je nekonečno. Pokud součet $B + K$ není definovaný nebo $A = 0$, pak OSRJN. Ve zbývajícím případu, když $A \neq 0$ a $B + K$ je nekonečno, rovnost platí a na obou stranách je nekonečno se znaménkem rovným součinu znamének prvků A a $B + K$.

Jak víme, ani aditivní ani multiplikativní inverzy prvků $\pm\infty$ nejsou definované. Víme, že relace $<$ na $\mathbb{R}^*$ je lineární uspořádání. Zbývá prověřit axiomy

$$A < B \Rightarrow A + K < B + K \ \text{ a } \ A,\, B > 0 \Rightarrow A \cdot B > 0\ ,$$

pokud alespoň jeden z prvků A, B a K je nekonečno. První neplatí, když K je nekonečno a $A < B$ jsou konečné. Snadno se vidí, že druhý axiom platí. $\square$

Pokud se čtenář zaradoval, že jsme s nekonečny hotovi, radoval se předčasně. Prozkoumáme jejich vztah k operacím odečítání a dělení. Těm se v uspořádaném tělese F nevěnuje moc pozornost, protože se dají redukovat na sčítání, násobení a inverzy: pro $a, b \in F$ je

$$a - b = a + (-1)_F \cdot b \ \text{ a } \ \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}\ .$$

Odečítání v $\mathbb{R}^*$ lze takto odbýt (definice 2.1.4), ale dělení ne.

Věta 2.1.10 (dělení v $\mathbb{R}^*$) *Pro každé $A, B, K, L \in \mathbb{R}^*$ se*

$$\frac{A}{K} + \frac{B}{K} = \frac{A+B}{K} \quad a \quad \frac{A}{K} \cdot \frac{B}{L} = \frac{A \cdot B}{K \cdot L},$$

nebo některá ze stran rovnosti není definovaná.

Důkaz. Začneme první rovností. Nechť K je nekonečno. Pokud A nebo B je nekonečno, pak OSRJN. Jsou-li A a B konečné, rovnost platí jako $0 + 0 = 0$. Nechť $K \in \mathbb{R}$ a A nebo B je nekonečno. Pokud $K = 0$, pak OSRJN. Nechť $K \neq 0$. Jsou-li A a B nekonečna s opačnými znaménky, pak OSRJN. Ve zbývajícím případu, kdy $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, např. A je nekonečno a $B \in \mathbb{R}$ nebo B je nekonečno se stejným znaménkem jako A, rovnost platí a na obou stranách je nekonečno se znaménkem rovným podílu znamének prvků A a K.

Přejdeme ke druhé rovnosti. Nechť A nebo B je nekonečno. Aby pravá strana byla definovaná, ani A ani B ani K ani L není nula a ani K ani L není nekonečno. Rovnost pak platí, na obou stranách je nekonečno se znaménkem rovným součinu znamének těchto čtyř prvků. Nechť $A, B \in \mathbb{R}$ a K nebo L je nekonečno. Aby pravá strana byla definovaná, ani K ani L není nula. Rovnost pak platí jako $0 = 0$. □

Podle [3, str. 214 prvního dílu], [4, str. 19] a [15, str. 122] symbol nekonečna ∞ zavedl do matematiky v r. 1655 anglický matematik *John Wallis (1616–1703).*

• *Okolí bodů a nekonečen.* Připomínáme značení reálných intervalů:

$$(a,\, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a < x \le b\},\ (-\infty,\, a) = \{x \in \mathbb{R} :\ x < a\}$$

a podobně. Bohužel se lze stále setkat se značením intervalů pomocí obrácených hranatých závorek. Předchozí dva intervaly se pak zapíšou jako $]a, b]$ a $(-\infty, a[$. Někdy se objevují i špičaté závorky $\langle$ a $\rangle$.

Definice 2.1.11 (okolí bodů a nekonečen) *Pro $b \in \mathbb{R}$ definujeme $\underline{\varepsilon\text{-okolí}}$ bodu b jako $U(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Dále $\underline{\varepsilon\text{-okolí nekonečna}}$ je*

$$U(-\infty,\, \varepsilon) = (-\infty,\, -1/\varepsilon) \quad a \quad U(+\infty,\, \varepsilon) = (1/\varepsilon,\, +\infty)\;.$$

Následující úlohy podávají přehled základních vlastností okolí.

Úloha 2.1.12 *Když $c \in U(A, \varepsilon)$ a $c < b < A + \varepsilon$ nebo $A - \varepsilon < b < c$, pak i $b \in U(A, \varepsilon)$.*

Pro $M, N \subset \mathbb{R}$ značením $M < N$ říkáme, že vždy $x \in M,\ y \in N \Rightarrow x < y$.

Úloha 2.1.13 *$A < B \Rightarrow$ existuje ε, že $U(A, \varepsilon) < U(B, \varepsilon)$, speciálně $U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$.*

Úloha 2.1.14 *Vždy $\varepsilon \le \delta \Rightarrow U(A, \varepsilon) \subset U(A, \delta)$.*

Úloha 2.1.15 *Vždy* $\bigcap_{k=1}^{\infty} U(b,\, 1/k) = \{b\}$ *a* $\bigcap_{k=1}^{\infty} U(\pm\infty, 1/k) = \emptyset$.

• *Limity posloupností.* Symboly $(a_n), (b_n)$ a (c_n) označují posloupnosti reálných čísel. Říkáme jim reálné posloupnosti nebo jen posloupnosti. Následující definice je základní.

Definice 2.1.16 (limita posloupnosti) *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *a* $L \in \mathbb{R}^*$. *Pokud pro každé* ε *existuje* n_0, *že* $n \ge n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \varepsilon)$, *píšeme, že* $\lim a_n = L$ *či* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *či* $a_n \to L$, *a řekneme, že posloupnost* (a_n) *má limitu* L.

Když $L \in \mathbb{R}$, pak (a_n) má vlastní limitu a konverguje. Když $L = \pm\infty$, pak (a_n) má nevlastní limitu. Posloupnost diverguje, když nemá limitu nebo má nevlastní limitu. Vlastní limita $\lim a_n = a$ znamená, že pro každé reálné (a jakkoli malé) $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každý index $n \ge n_0$ je vzdálenost mezi a_n a a menší než ε, to jest $|a_n - a| < \varepsilon$. Nevlastní limita $\lim a_n = -\infty$ znamená, že pro každé (a jakkoli záporné) c existuje index n_0, že pro každý index $n \ge n_0$ je $a_n \le c$. Opačná nerovnost dává limitu $+\infty$. Eventuálně konstantní posloupnost (a_n) s $a_n = a$ pro každé $n \ge n_0$ je příklad konvergentní posloupnosti, samozřejmě s limitou $\lim a_n = a$. Místo nerovnostíi $|a_n - a| < \varepsilon$ budeme dále psát, v souladu s principem neostrých nerovností z minulé přednášky, nerovnost $|a_n - a| \le \varepsilon$.

Nechť $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je množina všech reálných posloupností. Množinám $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ říkáme vlastnosti reálných posloupností.

Definice 2.1.17 (robustní vlastnosti) $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *je robustní vlastnost, když vždy platí implikace* $(a_n) \in V \Rightarrow (b_n) \in V$, *pakliže* $a_n \ne b_n$ *jen pro konečně mnoho indexů* n.

Úloha 2.1.18 *Která z vlastností* $V_1, \dots, V_4$ *posloupnosti* (a_n) *je robustní?* V_1 : (a_n) *konverguje,* V_2 : (a_n) *diverguje,* V_3 : $\lim a_n = -\infty$ *a* V_4 : $a_1 = 0$.

Tvrzení 2.1.19 (jednoznačnost limity) *Limita posloupností je jednoznačná,* $\lim a_n = K \wedge \lim a_n = L \Rightarrow K = L$.

Důkaz. Nechť $\lim a_n = K$ i $\lim a_n = L$ a ε je libovolné. Podle definice 2.1.16 existuje n_0, že $n \ge n_0 \Rightarrow a_n \in U(K, \varepsilon)$ i $a_n \in U(L, \varepsilon)$. Pro každé ε je tedy $U(K, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon) \ne \emptyset$. Podle úlohy 2.1.13 se $K = L$. □

• *Dvě limity.* Ukážeme, že $\lim \frac{1}{n} = 0$. Což je jasné, pro dané ε a každé $n \ge n_0 := \lceil 1/\varepsilon \rceil$ je

$$0 < \frac{1}{n} \le \underbrace{\frac{1}{\lceil 1/\varepsilon \rceil}}_{\ge 1/\varepsilon} \le \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \rightsquigarrow |1/n - 0| \le \varepsilon \,.$$

Zde $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$ označuje horní celou část čísla a, nejmenší číslo $v \in \mathbb{Z}$, že $v \ge a$. Podobně dolní celá část $\lfloor a \rfloor$ čísla a je největší číslo $v \in \mathbb{Z}$, že $v \le a$.

V druhém příkladu odvodíme, že

$$\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}\to-\infty\ .$$

Buď dáno $c<0$. Pro každé $n\ge n_0\ge 4c^2, 2^6$ pak je

$$\overbrace{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}^{\text{netriviální}}=\overbrace{n^{1/2}\cdot\underbrace{(n^{-1/6}-1)}_{\cdots\le -1/2}}^{\text{triviální}}\le\underbrace{-n^{1/2}}_{\cdots\le -2|c|}\ /\,2\le -2|c|/2=c\ .$$

První horní svorka říká, že v tomto tvaru je hledaná limita netriviální, jeví se jako neurčitý výraz $+\infty-(+\infty)$. Jednoduchou algebraickou úpravou ale výraz převedeme do triviální tvaru $(+\infty)\cdot(0-1)=-\infty$. Dolní svorka vždy udává horní mez platnou pro výraz uzavřený svorkou, když $n\ge n_0$.

Při výpočtu limity nemusíme nalézt optimální hodnotu indexu n_0 v závislosti na ε či c. To lze jen v nejjednodušších případech typu $\lim\frac{1}{n}$, jinak to může být obtížné. Stačí mít libovolnou hodnotu n_0, aby pro každé $n\ge n_0$ platila (neostrá) nerovnost v definici limity. I k tomu je ale nutné umět správně zacházet s nerovnostmi a odhady.

Úloha 2.1.20 *Vypočítejte limitu*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}}\ .$$

2.2 Podposloupnosti, limita n-té odmocniny z n

• *Podposloupnosti posloupností.* Podposloupnost posloupnosti (a_n) získáme vynecháním některých členů v (a_n) tak, že stále zbývá nekonečná posloupnost. Formálně níže. V definici 2.2.6 zavedeme takzvané slabé podposloupnosti.

Definice 2.2.1 (podposloupnost) *Řekneme, že (b_n) je podposloupností posloupnosti (a_n), pokud existuje posloupnost $(m_n)\subset\mathbb{N}$ s $m_1<m_2<\dots$, že pro každé n se $b_n=a_{m_n}$. Tento vztah posloupností (b_n) a (a_n) označíme symbolem $(b_n)\preceq(a_n)$.*

Úloha 2.2.2 *Relace $\preceq$ na množině posloupností $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je reflexivní a tranzitivní.*

Úloha 2.2.3 *Popište dvě posloupnosti, že $(a_n)\preceq(b_n)$ i $(b_n)\preceq(a_n)$, ale $(a_n)\ne(b_n)$.*

Tvrzení 2.2.4 ($\preceq$ zachovává limity) *Nechť $(b_n)\preceq(a_n)$ a $\lim a_n=L$. Pak i $\lim b_n=L$.*

Důkaz. Plyne hned z definic 2.1.16 a 2.2.1, protože posloupnost (m_n) v poslední definici splňuje pro každé n, že $m_n\ge n$. □

První část následující věty dokážeme později a další dvě části hned.

Věta 2.2.5 (o podposloupnostech) *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$. *Platí následující.*

1. *Existuje* (b_n), *že* $(b_n) \preceq (a_n)$ *a* (b_n) *má limitu.*
2. $\lim a_n$ *neexistuje* $\iff$ (a_n) *má dvě podposloupnosti s různými limitami.*
3. (a_n) *nemá limitu* A $\iff$ (a_n) *má podposloupnost s limitou různou od* A.

Důkaz. 1. Dokážeme později.

2. Implikace $\Leftarrow$ plyne z posledního tvrzení. Dokážeme implikaci $\Rightarrow$. Nechť (a_n) nemá limitu. Podle části 1 existuje $(b_n) \preceq (a_n)$ s $\lim b_n = B$. Ale B není limitou (a_n), takže existuje ε a posloupnost $(c_n) \preceq (a_n)$, že pro každé n je $c_n \notin U(B, \varepsilon)$. Podle části 1 existuje $(d_n) \preceq (c_n)$, že $\lim d_n = K$. Patrně $(d_n) \preceq (a_n)$ a $K \neq B$. Tedy (b_n) a (d_n) jsou hledané podposloupnosti.

3. Implikace $\Leftarrow$ plyne z posledního tvrzení. Dokážeme implikaci $\Rightarrow$. Nechť (a_n) nemá limitu A. Tedy existuje ε a $(b_n) \preceq (a_n)$, že pro každé n je $b_n \notin U(A, \varepsilon)$. Podle části 1 existuje $(c_n) \preceq (b_n)$, že $\lim c_n = B$. Patrně $(c_n) \preceq (a_n)$ a $B \neq A$. Tedy (c_n) je hledaná podposloupnost. $\square$

Vždy tedy můžeme dokázat, že daná posloupnost nemá limitu nalezením dvou podposloupností s různými limitami. Např.

$$(a_n) = ((-1)^n) = (-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots)$$

nemá limitu, protože $(1, 1, \dots) \preceq (a_n)$ i $(-1, -1, \dots) \preceq (a_n)$ a tyto konstantní podposloupnosti mají různé limity 1 a -1.

Definice 2.2.6 (slabá podposloupnost) *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$. *Posloupnost* (b_n) *nazveme* <u>*slabou podposloupností*</u> *posloupnosti* (a_n), *existuje-li taková posloupnost* $(m_n) \subset \mathbb{N}$, *že* $\lim m_n = +\infty$ *a pro každé* n *se* $b_n = a_{m_n}$. *Tento vztah obou posloupností označíme jako* $(b_n) \preceq^* (a_n)$.

Úloha 2.2.7 *Dokažte zobecnění tvrzení 2.2.4: když* $(b_n) \preceq^* (a_n)$ *a* $\lim a_n = L$, *pak i* $\lim b_n = L$.

Úloha 2.2.8 *Když* $(b_n) \preceq^* (a_n)$, *pak existuje* (c_n), *že* $(c_n) \preceq (b_n)$ *a* $(c_n) \preceq (a_n)$.

• *Limita n-té odmocniny z n.* Výpočet limity je <u>netriviální</u>, když je nutné počítat limitu nějakého neurčitého (aritmetického nebo mocninného) výrazu. Jinak je <u>triviální</u>. Třeba limity $\lim(2^n + 3^n)$ a $\lim \frac{4}{5n-3}$ jsou triviální, kdežto limity $\lim(2^n - 3^n)$ a $\lim \frac{4n+7}{5n-3}$ jsou netriviální. Netriviální limitu často spočítáme tak, že ji algebraicky upravíme na triviální. Viz $\lim(\sqrt[3]{n} - \sqrt{n})$ výše. Následující limita z $n^{1/n}$ je netriviální, protože n jde do $+\infty$, ale $1/n$ jde k 0, a $(+\infty)^0$ je neurčitý mocninný výraz (jsou tři druhy neurčitých mocninných výrazů, přesně je uvedeme později). Jak hned uvidíme, exponent převládne a $n^{1/n} \to 1$. K počítání limit posloupností daných aritmeticko-mocninnými výrazy se vrátíme v *MA 1*$^+$. Začneme připomenutím známé <u>Binomické věty</u>.

Úloha 2.2.9 (Binomická věta) *Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ se*

$$(a+b)^n = \textstyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}\,.$$

Zde $\binom{n}{j} = n(n-1)\dots(n-j+1)/j!$, *s* $\binom{n}{0} = 1$.

Tvrzení 2.2.10 ($n^{1/n} \to 1$) *Platí, že*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\,.$$

Důkaz. Vždy $n^{1/n} \ge 1$. Kdyby $n^{1/n} \not\to 1$, existovalo by číslo $c > 0$ a posloupnost $(n_i) \subset \mathbb{N}$ s $2 \le n_1 < n_2 < \dots$, že pro každé i je $n_i^{1/n_i} \ge 1 + c$ (úloha 2.2.11). Umocněním této nerovnosti na n_i a použitím úlohy 2.2.9 dostáváme pro každý index i, že

$$\begin{aligned} n_i &\ge (1+c)^{n_i} = \textstyle\sum_{j=0}^{n_i} \binom{n_i}{j} c^j = 1 + \binom{n_i}{1}c + \binom{n_i}{2}c^2 + \dots + \binom{n_i}{n_i}c^{n_i} \\ &\ge \binom{n_i}{2}c^2 = \tfrac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2\,. \end{aligned}$$

Pro každé i tak máme

$$n_i \ge \tfrac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2 \leadsto 1 + 2/c^2 \ge n_i\,.$$

To je spor, posloupnost $n_1 < n_2 < \dots$ není shora omezená. $\square$

Úloha 2.2.11 *Vysvětlete, proč existuje posloupnost (n_i) s uvedenou vlastností.*

2.3 Pět vět o existenci limit

Uvedeme a dokážeme pět vět o existenci limit reálných posloupností, větu 2.3.3, 2.3.9, 2.3.15, 2.3.20 a 2.3.25.

• *Monotonie a omezenost posloupností.* Připomeneme monotónní, omezené a neomezené posloupnosti. Řekneme, že posloupnost (a_n) <u>neklesá</u> (resp. <u>neroste</u>), když pro $\forall\, n$ je $a_n \le a_{n+1}$ (resp. $a_n \ge a_{n+1}$). <u>Klesá</u> (resp. <u>roste</u>), když pro $\forall\, n$ je $a_n > a_{n+1}$ (resp. $a_n < a_{n+1}$). Je <u>monotónní</u>, když neklesá nebo neroste. Posloupnost je <u>ryze monotónní</u>, když klesá nebo roste.

Posloupnost (a_n) je <u>shora omezená</u>, pokud existuje c, že pro $\forall n$ je $a_n \le c$, jinak je (a_n) <u>shora neomezená</u>. Otočením nerovnosti máme <u>omezenost zdola</u>, resp. <u>neomezenost zdola</u>. Posloupnost (a_n) je <u>omezená</u>, je-li shora i zdola omezená.

Úloha 2.3.1 *Dokažte, že posloupnost (a_n) je omezená, právě když existuje c, že pro každé n je $|a_n| \le c$.*

Úloha 2.3.2 *Které z těchto jedenácti vlastností posloupností jsou robustní?*

• *Limity monotónních posloupností.* Existence limity posloupnosti se dá často dokázat pomocí následující věty a jejího důsledku.

Věta 2.3.3 (limity MP) *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *neklesá, resp. neroste.* *Pak limita* $\lim a_n$ *existuje a rovná se*

$$\sup(\{a_n:\ n \in \mathbb{N}\}),\ resp.\ \inf(\{a_n:\ n \in \mathbb{N}\})\,.$$

Supremum a infimum zde bereme v lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$.

Důkaz. Nechť (a_n) neroste (případ neklesající (a_n) je podobný), $A \in \mathbb{R}^*$ je uvedené infimum a je dáno ε. Vezmeme $c > A$ tak, že $c \in U(A, \varepsilon)$. Podle definice infima pro nějaké m je $a_m < c$. Pro každé $n \geq m$ pak je $A \leq a_n \leq a_m < c$. Podle úlohy 2.1.12 je $a_n \in U(A, \varepsilon)$. Takže $\lim a_n = A$. □

Monotonie ale není robustní vlastnost. Důsledek to napraví.

Důsledek 2.3.4 (robustní zobecnění) *Nechť* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má podposloupnost* $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$*, která neklesá, resp. neroste.* *Pak limita* $\lim a_n$ *existuje a rovná se*

$$\sup(\{a_n:\ n \geq m\}),\ resp.\ \inf(\{a_n:\ n \geq m\})\,.$$

Supremum a infimum zde opět bereme v lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$.

Důkaz. Nechť (a_n) a m jsou, jak uvedeno. Z definice limity je jasné, že limita podposloupnosti $(a_m, a_{m+1}, \dots)$ se rovná limitě celé posloupnosti. □

Úloha 2.3.5 *Předpoklad důsledku definuje robustní vlastnost posloupností.*

• *Limity kvazimonotónních posloupností.* Zobecníme monotónní posloupnosti. Řekneme, že $(a_n) \subset \mathbb{R}$ kvazineklesá (popř. kvazineroste), pokud pro každé n existuje jen konečně mnoho m, že $a_m < a_n$ (popř. $a_m > a_n$). Posloupnost (a_n) je kvazimonotónní, je-li kvazineklesající nebo kvazinerostoucí.

Úloha 2.3.6 *Každá monotónní posloupnost je kvazimonotónní.*

Úloha 2.3.7 *Uveďte příklad kvazimonotónní posloupnosti* (a_n)*, jejíž žádná podposloupnost* $(a_m, a_{m+1}, \dots)$ *není monotónní.*

Úloha 2.3.8 *Zapište kvazimonotonii jen pomocí kvantifikátorů, logických spojek, závorek, proměnných a nerovností mezi přirozenými a reálnými čísly.*

Následující věta používá veličiny $\limsup$ a $\liminf$ posloupnosti. Ty jsou vždy definované a nabývají hodnoty v $\mathbb{R}^*$. Definujeme je příště.

Věta 2.3.9 (limity KMP). *Když posloupnost* (a_n) *kvazineklesá, popř. kvazineroste, pak* $\lim a_n = \limsup a_n$*, popř.* $\lim a_n = \liminf a_n$.

Důkaz. Nechť (a_n) kvazineklesá (případ kvazinerostoucí (a_n) je podobný), $A = \limsup a_n$ a je dáno ε. Posloupnost (a_n) má podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = A$ a pro každé $n \ge n_0$ je $a_n < A + \varepsilon$. Vezmeme n', že $a_{m_{n'}} \in U(A, \varepsilon)$. Protože (a_n) kvazineklesá, vezmeme $n_1 \ge n_0$, že pro každé $n \ge n_1$ je

$$a_{m_{n'}} \le a_n < A + \varepsilon \ .$$

Podle úlohy 2.1.12 je $a_n \in U(A, \varepsilon)$ a $\lim a_n = A$. □

Opět uvedeme robustní zesílení.

Důsledek 2.3.10 (robustní zobecnění) *Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má podposloupnost $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$, která kvazineklesá, resp. kvazineroste. Pak*

$$\lim a_n = \limsup a_n, \ \textit{resp.} \ \lim a_n = \liminf a_n \ .$$

Důkaz. Nechť (a_n) a m jsou, jak uvedeno. Z definice limity je jasné, že limita podposloupnosti $(b_n) = (a_m, a_{m+1}, \dots)$ se rovná limitě celé posloupnosti. Samozřejmě $\limsup b_n = \limsup a_n$ a totéž pro liminf. □

Úloha 2.3.11 *Předpoklad důsledku definuje robustní vlastnost posloupností.*

I ve větě 2.3.3 a důsledku 2.3.4 lze suprema a infima nahradit limsupy a liminfy. S kvazimonotónními posloupnostmi přišel anglický matematik *Godfrey H. Hardy (1877–1947).* V *MA 1*$^+$ dokážeme, že předešlý důsledek je v jistém smyslu nejobecnější výsledek o existenci limit posloupností omezených nerovnostmi.

- *Bolzano–Weierstrassova věta.* Začneme zajímavým pomocným výsledkem.

Tvrzení 2.3.12 (existence MPP) *Každá reálná posloupnost má monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Pro danou posloupnost (a_n) uvážíme množinu

$$M = \{n : \ \forall m \left(n \le m \Rightarrow a_n \ge a_m\right)\} \ .$$

Když množina $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$ je nekonečná, máme nerostoucí podposloupnost (a_{m_n}). Když M je konečná, vezmeme číslo $m_1 > \max(M)$ (pro $M = \emptyset$ je m_1 libovolné). Pak jistě $m_1 \not\in M$ a tedy existuje číslo $m_2 > m_1$, že $a_{m_1} < a_{m_2}$. Protože $m_2 \not\in M$, existuje $m_3 > m_2$, že $a_{m_2} < a_{m_3}$. A tak dále, dostaneme rostoucí podposloupnost (a_{m_n}). □

Úloha 2.3.13 *Zobecněte předchozí tvrzení pro obecné lineární uspořádání.*

Z věty 2.3.3 a z předešlého tvrzení dostáváme dva důsledky. První z nich je část 1 věty 2.2.5. Druhým je Bolzano–Weierstrassova věta.

Důsledek 2.3.14 (část 1 věty 2.2.5) *Každá posloupnost reálných čísel má podposloupnost, která má limitu.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Podle předešlého tvrzení máme monotónní podposloupnost $(b_n) \preceq (a_n)$. Podle věty 2.3.3 má (b_n) limitu. □

Věta 2.3.15 (Bolzano–Weierstrassova) *Každá omezená reálná posloupnost má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť (a_n) je omezená posloupnost a $(b_n) \preceq (a_n)$ je její monotónní podposloupnost zaručená předešlým tvrzením. Patrně je (b_n) omezená a podle věty 2.3.3 má vlastní limitu. □

Úloha 2.3.16 (limita v intervalu) *Nechť $a \le b$ jsou reálná čísla. Pak každá posloupnost $(a_n) \subset [a, b]$ má podposloupnost (a_{m_n}), která má vlastní limitu* $\lim a_{m_n} \in [a, b]$.

Karl Weierstrass (1815–1897) byl německý matematik.

• *Cauchyova podmínka.* V definici množiny $\mathbb{R}$ jsme se setkali s Cauchyovými posloupnostmi zlomků. Reálné Cauchyovy posloupnosti jsou definovány stejně.

Definice 2.3.17 (Cauchyovy posloupnosti) *Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ nazveme Cauchyovou (nebo cauchyovskou), pokud pro každé ε existuje n_0, že $m, n \ge n_0$ $\Rightarrow |a_m - a_n| \le \varepsilon$.*

Úloha 2.3.18 *Cauchyovost posloupností reálných čísel je robustní vlastnost.*

Úloha 2.3.19 *Každá Cauchyova posloupnost reálných čísel je omezená.*

Věta 2.3.20 (Cauchyova podmínka) *(a_n) je konvergentní $\iff$ (a_n) je Cauchyova.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\lim a_n = a$ a je dáno ε. Pak $|a_n - a| \le \varepsilon/2$ pro každé velké n. Podle úlohy 2.1.2 pro každé velké m a n platí, že

$$|a_m - a_n| \le |a_m - a| + |a - a_n| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Takže (a_n) je Cauchyova posloupnost.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť (a_n) je Cauchyova posloupnost. Jak víme z poslední úlohy, (a_n) je omezená. Podle Bolzano–Weierstrassovy věty má konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s limitou a. Pro dané ε tak pro každé velké m a n je $|a_{m_n} - a| \le \varepsilon/2$ a $|a_m - a_n| \le \varepsilon/2$. Vždy $m_n \ge n$, takže opět podle úlohy 2.1.2 pro každé velké n je

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

Tedy $\lim a_n = a$. □

Je zajímavé, že francouzský matematik A.-L. Cauchy, po němž jsou posloupnosti v definici 2.3.17 (a řada dalších pojmů v analýze) nazvány, pobýval několik let v Praze v politickém exilu.

Úloha 2.3.21 *Ukažte, že existuje Cauchyova posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{Q}$*, která nemá racionální limitu. Předešlá věta tak v uspořádaném tělese* $\mathbb{Q}$ *neplatí.*

To není nic překvapujícího, víme, že uspořádané těleso $\mathbb{Q}$ není úplné.

Úloha 2.3.22 *Kde se v důkazu předešlé věty použila úplnost reálných čísel?*

• *Feketeho lemma.* Lemma, jež uvedeme jako větu, se jmenuje podle maďarsko-izraelského matematika *Michaela Feketeho (1886–1957).*

Úloha 2.3.23 *fekete = ?*

Úloha 2.3.24 *Řešte předešlou úlohu prostředky dostupnými v r. 1984.*

Posloupnost (a_n) je superaditivní, popř. subaditivní, pokud pro každé indexy m a n je $a_{m+n} \ge a_m + a_n$, popř. $a_{m+n} \le a_m + a_n$.

Věta 2.3.25 (Feketeho lemma) *Nechť* (a_n) *je posloupnost a* $M = \{a_n/n : n \in \mathbb{N}\}$*. Když* (a_n) *je superaditivní, popř. subaditivní, pak* $\lim \frac{a_n}{n} = \sup(M)$*, popř.* $\lim \frac{a_n}{n} = \inf(M)$*. Supremum a infimum zde bereme v* LU $(\mathbb{R}^*, <)$.

Důkaz. Nechť (a_n) je superaditivní (pro subaditivní posloupnosti je argument podobný) a je dáno ε. Vezmeme $c < \sup(M)$ tak, že $c \in U(\sup(M), \varepsilon)$. Podle definice suprema existuje m, že $a_m/m > c$. Nechť číslo $n \ge m$ je libovolné. Napíšeme ho jako $n = km + l$, kde $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ a $0 \le l < m$ (tj. n vydělíme číslem m se zbytkem). Díky superaditivitě (a_n) je

$$\frac{a_n}{n} \ge \frac{ka_m}{km + l} + \frac{a_l}{n} = \frac{a_m/m}{1 + l/km} + \frac{a_l}{n}\,.$$

Pro $n \to \infty$ i $k \to \infty$, tedy $1 + l/km \to 1$, $a_l/n \to 0$ a pro každé δ pro velké n je $a_n/n \ge a_m/m - \delta$. Existuje $n_0 \ge m$, že pro každé $n \ge n_0$ je $c < a_n/n \le \sup(M)$. Podle úlohy 2.1.12 je $a_n/n \in U(\sup(M), \varepsilon)$. Tedy $a_n/n \to \sup(M)$. □

Ve čtyřech úlohách ukážeme použití věty 2.3.25 v extremální kombinatorice.

Úloha 2.3.26 (*abba*-prostá slova) *Nechť* $f(n) = l$ *je maximální délka slova* $u = a_1 a_2 \dots a_l$ *nad* n*-prvkovou abecedou splňujícího dvě podmínky.* (i) *Pro každé* $i \in [l-1]$ *je* $a_i \ne a_{i+1}$. (ii) *Slovo* u *neobsahuje podslovo typu abba, takže neexistují čtyři indexy* $1 \le k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \le l$*, pro něž* $a_{k_1} = a_{k_4} \ne a_{k_2} = a_{k_3}$*. Pomocí Feketeho lemmatu dokažte, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$L = \lim f(n)/n\,.$$

Není moc těžké dokázat, že $f(n) = 3n - 2$, takže $L = 3$.

Úloha 2.3.27 (*abab*-prostá slova) *Táž úloha pro abab-prostá slova.*

I zde není moc těžké dokázat, že $f(n) = 2n - 1$, takže $L = 2$.

Úloha 2.3.28 (*aabb*-prostá slova) *Táž úloha pro aabb-prostá slova.*

Aritmetickou posloupností X ($\subset \mathbb{Z}$) délky $k \in \mathbb{N}$ rozumíme každou množinu

$$X = \{a + jd : \ j \in [k]\}, \ a \in \mathbb{Z} \ \& \ d \in \mathbb{N} .$$

Úloha 2.3.29 (funkce $r_k(n)$) *Pro $k, n \in \mathbb{N}$ nechť $r_k(n)$ je maximální velikost množiny $A \subset [n]$ neobsahující aritmetickou posloupnost délky k. Pomocí Feketeho lemmatu dokažte, že pro každé k existuje vlastní limita*

$$L_k = \lim_{n\to\infty} r_k(n)/n \ \ (\in [0, 1]) \ .$$

Lehce se vidí, že $L_1 = L_2 = 0$. Pro $k \geq 3$ platí následující slavná věta.

Věta 2.3.30 (E. Szemerédi, 1975) *I pro každé $k \geq 3$ se $L_k = 0$.*

Její důkaz je dosti obtížný, viz [11] či [12].

Kapitola 3

Přednáška 3. Aritmetika limit. AK řady

Kapitolu založenou na třetí přednášce

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred3.pdf`

ze 7. 3. 2024 začneme oddílem 3.1 o vztahu limit posloupností a aritmetických operací. Hlavním výsledkem je věta 3.1.2 o limitě součtové, součinové a podílové posloupnosti. Ve dvou jejích dodatcích v tvrzeních 3.1.4 a 3.1.6 nejprve uvedeme několik situací větou nepokrytých, a pak pomocí limit zachytíme nejednoznačnost neurčitých aritmetických výrazů. Důkazy dodatků jsou úlohy.

V oddílu 3.2 ilustrujeme důkazem tvrzení 3.2.2 výpočet limity rekurentní posloupnosti. V tvrzení 3.2.4 určíme limity posloupnosti (q^n). Oddíl 3.3 se zabývá vztahem limit a uspořádání reálných čísel. Věta 3.3.2 o tomto vztahu je v naší učebnici silnější, než jak se obvykle uvádí. Podobně i věta 3.3.10 o dvou strážnících. Oddíl 3.4 se věnuje veličinám $\liminf$ a $\limsup$ reálné posloupnosti. Ve větě 3.4.4 dokážeme, že tyto hodnoty přiřazené dané posloupnosti jsou vždy definované, a věta 3.4.6 uvádí jejich základní vlastnosti.

V závěrečném oddílu 3.5 uvedeme na scénu (nekonečné) řady. Pojmeme je jinak, než je standardní, zavedeme takzvané AK řady jako spočetná zobecnění konečných součtů. Řadám se dále věnujeme v následující přednášce a v *MA 1^+*.

3.1 Aritmetika limit

• *Aritmetika limit.* Připomínáme, že (a_n), (b_n) a (c_n) označují reálné posloupnosti, že reálná čísla ε, δ a θ jsou vždy kladná, že $\mathbb{R}^*$ je rozšířená reálná osa a že A, B, K a L označují její prvky. Připomínáme počítání s nekonečny v definici 2.1.3. Následující věta je základem pro výpočet limit. Nejprve ale úloha.

Úloha 3.1.1 (obměna Δ-ové nerovnosti) *Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ je*

$$|a+b| \ge |a| - |b| \ \ i \ \ |a-b| \ge |a| - |b| \ .$$

Věta 3.1.2 (aritmetika limit) *Nechť* $\lim a_n = K$ *a* $\lim b_n = L$. *Potom se* $\lim(a_n + b_n) = K + L$, $\lim(a_n b_n) = KL$ *a* $\lim(a_n/b_n) = K/L$, *když výraz vpravo není neurčitý.*

Důkaz. Součet. Nechť $K, L \in \mathbb{R}$ a je dáno ε. Pro každé velké n máme $|a_n - K| \le \varepsilon/2$ a $|b_n - L| \le \varepsilon/2$. Podle Δ-ové nerovnosti pro tato n

$$|(a_n + b_n) - (K + L)| \le |a_n - K| + |b_n - L| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

a $a_n + b_n \to K + L$.

Nechť $K = L = \pm\infty$ a je dáno ε. Pro každé velké n mají a_n a b_n znaménko jako K a $|a_n|, |b_n| \ge 1/2\varepsilon$. Pro tato n tedy $a_n + b_n$ má znaménko jako K, $|a_n + b_n| = |a_n| + |b_n| \ge 1/2\varepsilon + 1/2\varepsilon = 1/\varepsilon$ a $a_n + b_n \to K + L = K = L$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R}$ a je dáno ε. Pro každé velké n má a_n znaménko jako K, $|a_n| \ge 1/\varepsilon + |L| + 1$ a $|b_n - L| \le 1$, tedy $|b_n| \le |L| + 1$. Pro tato n má $a_n + b_n$ znaménko jako K a, podle úlohy 3.1.1, $|a_n + b_n| \ge |a_n| - |b_n| \ge 1/\varepsilon + |L| + 1 - |L| - 1 = 1/\varepsilon$, tudíž $a_n + b_n \to K + L = K$. Případy $K \in \mathbb{R}$ a $L = \pm\infty$ řeší komutativita sčítání.

Součin. Nechť $K, L \in \mathbb{R}$ a je dáno $\varepsilon \le 1$. Pro každé velké n máme $|a_n - K| \le \varepsilon/(2|L|+1)$, tedy $|a_n| \le |K|+1$, a $|b_n - L| \le \varepsilon/(2|K|+2)$. Podle Δ-ové nerovnosti pro tato n

$$\begin{aligned} |a_n b_n - KL| &\le |a_n| \cdot |b_n - L| + |L| \cdot |a_n - K| \\ &\le (|K| + 1) \cdot \tfrac{\varepsilon}{2|K|+2} + |L| \cdot \tfrac{\varepsilon}{2|L|+1} \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

a $a_n b_n \to KL$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L = \pm\infty$ a je dáno ε. Pro každé velké n má a_n znaménko jako K, b_n jako L a $|a_n|, |b_n| \ge 1/\sqrt{\varepsilon}$. Pro tato n má tedy $a_n b_n$ znaménko jako KL, $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \ge 1/\sqrt{\varepsilon} \cdot 1/\sqrt{\varepsilon} = 1/\varepsilon$ a $a_n b_n \to KL$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($L = 0$ dává neurčitý výraz) a je dáno ε. Pro každé velké n má a_n znaménko jako K, $|a_n| \ge 2/(\varepsilon|L|)$ a $|b_n - L| \le |L|/2$, tedy $|b_n| \ge |L|/2$. Pro tato n tedy $a_n b_n$ má znaménko jako KL, $|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \ge \frac{2}{\varepsilon|L|} \cdot \frac{|L|}{2} = 1/\varepsilon$ a $a_n b_n \to KL$. Případy $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $L = \pm\infty$ řeší komutativita násobení.

Podíl. Nechť $K \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($L = 0$ dává neurčitý výraz) a je dáno ε. Pro velké n je $|a_n - K| \le \min(\{1, \varepsilon L^2/4(|L|+1)\})$ a $|b_n - L| \le \min(\{1, \varepsilon L^2/4(|K|+1), |L|/2\})$, tedy $|a_n| \le |K| + 1$, $|b_n| \le |L| + 1$ a $|b_n| \ge |L|/2$. Podle Δ-ové nerovnosti pro tato n je $\big|a_n/b_n - K/L\big| = \big|(a_n L - b_n K)/b_n L\big|$

$$\le \frac{|a_n| \cdot |L - b_n| + |b_n| \cdot |a_n - K|}{|b_n| \cdot |L|} \le \frac{\varepsilon L^2/4 + \varepsilon L^2/4}{L^2/2} = \varepsilon$$

a $a_n/b_n \to K/L$.

Nechť $K = \pm\infty$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a je dáno ε. Pro každé velké n má a_n znaménko jako K, $|a_n| \ge (|L| + 1)/\varepsilon$ a $|b_n - L| \le 1$, tedy $|b_n| \le |L| + 1$. Pro tato n tedy a_n/b_n má znaménko jako K/L, $|a_n/b_n| = |a_n|/|b_n| \ge \frac{|L|+1}{\varepsilon}/(|L| + 1) = 1/\varepsilon$ a $a_n/b_n \to K/L$.

Nechť $K \in \mathbb{R}$, $L = \pm\infty$ a je dáno ε. Pro každé velké n je $|a_n - K| \le 1$, tedy $|a_n| \le |K| + 1$, a $|b_n| \ge (|K| + 1)/\varepsilon$. Pro tato n tedy $|a_n/b_n - 0| = |a_n/b_n| = |a_n|/|b_n| \le \frac{|K|+1}{(|K|+1)/\varepsilon} = \varepsilon$ a $a_n/b_n \to K/L = 0$. □

Když $\lim a_n = K$, $\lim b_n = L$ a K/L není neurčitý výraz, pak $L \neq 0$. Konečně mnoho indexů n, kdy $b_n = 0$ a zlomek a_n/b_n není definovaný, pak ignorujeme či pro ně a_n/b_n libovolně dodefinujeme.

• *Dodatky k aritmetice limit.* Předešlá věta zdaleka nepopisuje aritmetiku limit reálných posloupností beze zbytku. I když (a_n) nebo (b_n) nemá limitu, výsledná jednoznačná limita součtu, součinu či podílu může stále existovat. Šest takových situací teď popíšeme. Důkazy ponecháváme jako úlohu.

Úloha 3.1.3 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 3.1.4 (dodatek 1 k AL) *Nechť (a_n) a (b_n) jsou reálné posloupnosti. I když případně (a_n) nemá limitu, platí následující implikace.*

1. *(a_n) je omezená a $L = \lim b_n = \pm\infty$. Pak $\lim(a_n + b_n) = L$.*
2. *(a_n) je omezená a $\lim b_n = 0$. Pak $\lim a_n b_n = 0$.*
3. *Pro každé velké n je $a_n \ge c > 0$ a $L = \lim b_n = \pm\infty$. Pak $\lim a_n b_n = L$.*
4. *(a_n) je omezená a $\lim b_n = \pm\infty$. Pak $\lim a_n/b_n = 0$.*
5. *Pro každé velké n je $a_n \ge c > 0$ i $b_n > 0$ a $\lim b_n = 0$. Pak $\lim a_n/b_n = +\infty$.*
6. *Pro každé velké n je $0 < a_n \le c$ a $L = \lim b_n = \pm\infty$. Pak $\lim b_n/a_n = L$.*

V částech 3 a 5 může také být $a_n \le c < 0$, v části 6 může být $c \le a_n < 0$ a v části 5 může být $b_n < 0$. Čtenář si tyto modifikace sám snadno přesně zformuluje a dokáže.

Je-li výraz $K+L$, KL či K/L neurčitý, není v obecné situaci výsledná limita jednoznačně určena. Na příkladech ukážeme, co se může dít.

Úloha 3.1.5 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 3.1.6 (dodatek 2 k AL) *Pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ existují reálné posloupnosti (a_n) a (b_n), pro něž platí následující.*

1. *$\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ a $\lim(a_n + b_n) = A$.*
2. *$\lim a_n = 0$, $\lim b_n = +\infty$ a $\lim a_n b_n = A$.*
3. *$\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $\lim a_n/b_n = A$.*
4. *$\lim a_n = \pm\infty$, $\lim b_n = \pm\infty$ a $\lim a_n/b_n = A$.*

3.2 Rekurentní posloupnosti

Počítání limit rekurentních posloupností demonstrujeme na příkladu v důkazu následujícího tvrzení. Podrobněji se těmito limitami zabýváme v *MA 1*$^+$.

• *Limita jedné rekurentní posloupnosti.* Začneme ale úlohou o nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Úloha 3.2.1 (AG nerovnost) *Pro každá dvě čísla $a, b \ge 0$ je $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$.*

Tvrzení 3.2.2 (rekurentní limita) *Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ buď dána jako $a_1 = 1$ a pro $n \ge 2$ vztahem $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$. Pak $\lim a_n = \sqrt{2}$.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge 0$, takže (a_n) konverguje podle důsledku 2.3.4. Patrně vždy $a_n > 0$ a a_n je definována pro každé n. Pro $n \ge 2$ je podle AG nerovnosti

$$a_n = a_{n-1}/2 + 1/a_{n-1} \ge 2\sqrt{(a_{n-1}/2)/a_{n-1}} = \sqrt{2}\,.$$

Pro $n \ge 3$ pak platí $a_{n-1} \ge a_n$, právě když $a_{n-1}/2 \ge 1/a_{n-1}$, to jest právě když $a_{n-1} \ge \sqrt{2}$, což je pravda. Nechť $a = \lim a_n \ge \sqrt{2}$. Podle AL a limit podposloupností je

$$a = \lim a_n = \frac{\lim a_{n-1}}{2} + \frac{1}{\lim a_{n-1}} = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}\,.$$

Tedy $a/2 = 1/a$, $a^2 = 2$ a $a = \sqrt{2}$. □

Aby postup při hledání limity rekurentní posloupnosti (a_n) předvedený výše byl správný, musí se vždy dokázat, že $\lim a_n$ existuje. Například rekurentní posloupnost (a_n) daná jako $a_1 = 1$ a $a_n = -a_{n-1}$, $n \ge 2$, nemá limitu $\lim a_n = 0$, přestože rovnice $L = -L$ má v $\mathbb{R}^*$ jediné řešení $L = 0$. Limita posloupnosti $(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots)$ neexistuje.

• *Limita geometrické posloupnosti.* Je to posloupnost mocnin

$$(q^n) = (q,\, q^2,\, q^3,\, \dots),\ q \in \mathbb{R}\,.$$

Úloha 3.2.3 (další dodatek k AL) *Pro každou posloupnost (a_n) je*

$$\lim a_n = 0 \iff \lim |a_n| = 0\,.$$

Tvrzení 3.2.4 (limita geometrické posloupnosti) *Nechť je $q \in \mathbb{R}$. Potom pro $|q| < 1$ se $\lim q^n = 0$, pro $q = 1$ se $\lim q^n = 1$, pro $q > 1$ se $\lim q^n = +\infty$ a pro $q \le -1$ tato limita neexistuje.*

Důkaz. Nechť $|q| < 1$. Podle poslední úlohy lze předpokládat, že $q \in [0, 1)$. Pak (q^n) neroste a je zdola omezená. Podle důsledku 2.3.10 má nezápornou vlastní limitu L. Protože $q^n = q \cdot q^{n-1}$, platí rovnice $L = q \cdot L$. Tedy $L = 0/(1-q) = 0$. Pro $q = 1$ máme konstantní posloupnost $(1, 1, \dots)$. Nechť $q > 1$. Podle první části tohoto tvrzení a části 5 tvrzení 3.1.4 je $\lim q^n = \lim \frac{1}{(1/q)^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$. Pro $q \leq -1$ posloupnost (q^n) nemá limitu, protože podposloupnosti se sudými a s lichými indexy mají různé limity. □

3.3 Uspořádání a limity

Probereme vztah limit a LU $(\mathbb{R}^*, <)$. K této záležitosti se vrátíme v *MA 1*$^+$.

• *Obligátní věta jinak.* Umíme-li porovnat členy dvou posloupností, umíme porovnat i jejich limity, a naopak. Ale které členy obou posloupností mezi sebou porovnáváme? Začneme úlohou.

Úloha 3.3.1 *Když $A < B$, pak existuje ε, že $U(A, \varepsilon) < U(B, \varepsilon)$, to jest vždy $x \in U(A, \varepsilon)$ a $y \in U(B, \varepsilon) \Rightarrow x < y$.*

Věta 3.3.2 (limita a uspořádání) *Mějme reálné posloupnosti (a_n) a (b_n), že $\lim a_n = K$ a $\lim b_n = L$. Potom platí následující.*

1. *Když $K < L$, tak existuje n_0, že pro každé dva, ne nutně stejné, indexy $m, n \geq n_0$ je $a_m < b_n$.*
2. *Když pro každé n_0 existují indexy m a n, že $m, n \geq n_0$ & $a_m \geq b_n$, pak $K \geq L$.*

Důkaz. 1. Nechť $K < L$. Podle úlohy 3.3.1 existuje ε, že $U(K, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Podle definice limity máme n_0, že platí implikace $m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m$ je v $U(K, \varepsilon)$ a b_n v $U(L, \varepsilon)$. Tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m < b_n$.

2. Podle logiky je implikace $\varphi \Rightarrow \psi$ totéž, jako její obměna $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ (úloha 1.2.2). Obměna implikace v části 1 je ale právě část 2. □

Jednou ze záhad výuky matematické analýzy je, proč se tato věta jinak uvádí vždy v daleko slabší podobě: $K < L \Rightarrow$ existuje n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n < b_n$. Podobně druhá část. (Sám jsem ovšem tyto slabší verze také řadu let učil.)

Úloha 3.3.3 *Vysvětlete, proč je první část věty 3.3.2 s různými indexy m a n silnější výsledek, než obvyklá verze s $m = n$.*

Ostrá nerovnost mezi členy dvou posloupností může v limitě přejít v rovnost.

Úloha 3.3.4 *Uveďte příklad konvergentních posloupností (a_n) a (b_n), že pro každé m a n je $a_m > b_n$, ale $\lim a_n = \lim b_n$.*

Následující tvrzení dále zesiluje první část poslední věty.

Úloha 3.3.5 *Dokažte následující tvrzení a formulujte odpovídající druhou část.*

Tvrzení 3.3.6 (zesílení věty 3.3.2) *Když* $\lim a_n = K$, $\lim b_n = L$ *a* $K < L$, *pak existují reálná čísla* $a < b$, *že pro každé* $m, n \ge n_0$ *je*

$$a_m \le a < b \le b_n \ .$$

• *Intervaly.* Pro reálná čísla a a b označíme uzavřený interval s konci a a b jako $I(a, b)$:

$$I(a, b) = [a, b] \text{ pro } a \le b \text{ a } I(a, b) = [b, a] \text{ pro } a \ge b\ .$$

$M \subset \mathbb{R}$ je konvexní množina, pokud pro každé $a, b \in M$ je $I(a, b) \subset M$. Například každé okolí $U(A, \varepsilon)$ je konvexní.

Tvrzení 3.3.7 (o intervalech) *Konvexní množiny reálných čísel jsou právě* $\emptyset$, *singletony* $\{a\}$ *pro* $a \in \mathbb{R}$, *celé* $\mathbb{R}$ *a pro reálná čísla* $a < b$ *intervaly* (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(-\infty, a]$ & $[a, +\infty)$.

Důkaz. Z tranzitivity $<$ plyne, že všechny uvedené množiny jsou konvexní. Ukážeme, že jiné konvexní reálné množiny neexistují. Nechť $X \subset \mathbb{R}$ s $X \neq \emptyset, \mathbb{R}, \{a\}$ je konvexní množina a $a \in \mathbb{R} \setminus X$. Z konvexity X plyne, že $a \in H(X)$ (horní meze množiny X) nebo $a \in D(X)$ (dolní meze množiny X). Probereme pouze první případ, druhý se na něj převede otočením nerovností.

Nechť tedy $H(X) \neq \emptyset$. Položíme $b = \sup(X)$. Nechť $D(X) = \emptyset$. Pokud $b \in X$, pak $X = (-\infty, b]$. Pokud $b \notin X$, pak $X = (-\infty, b)$. Nechť $D(X) \neq \emptyset$. Pak položíme $c = \inf(X)$, patrně $c < b$. Pokud $b \notin X$ a $c \notin X$, pak $X = (c, b)$. Pokud $b \notin X$ a $c \in X$, pak $X = [c, b)$. Pokud $b \in X$ a $c \notin X$, pak $X = (c, b]$. Konečně pokud $b \in X$ a $c \in X$, pak $X = [c, b]$. □

Úloha 3.3.8 *Existují neprázdné konečné intervaly?*

Definice 3.3.9 (netriviální intervaly) *Interval* I *je netriviální, pokud* $I \neq \emptyset, \{a\}$ *pro* $a \in \mathbb{R}$.

• *Věta o dvou strážnících.* Následující věta je populární vzhledem ke svému názvu. Zformulujeme ji trochu obecněji, než je obvyklé.

Věta 3.3.10 (dva strážníci) *Když* $\lim a_n = \lim b_n = a$, $(c_n) \subset \mathbb{R}$ *a pro každé velké* n *je* $c_n \in I(a_n, b_n)$, *pak též* $\lim c_n = a$.

Důkaz. Nechť posloupnosti (a_n), (b_n) a (c_n) jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Pak pro každé velké n je $a_n, b_n \in U(a, \varepsilon)$. Díky konvexitě $U(a, \varepsilon)$ pro každé velké n je $c_n \in I(a_n, b_n) \subset U(a, \varepsilon)$ a $c_n \to a$. □

Obvykle se požaduje $a_n \le c_n \le b_n$. Dva strážníci (a_n) a (b_n) mezi sebou vedou podezřelou posloupnost (c_n) ke společné limitě a.

Úloha 3.3.11 *Pro nevlastní limitu stačí jeden strážník: když* $\lim a_n = -\infty$ *a pro každé velké* n *je* $b_n \le a_n$, *pak i* $\lim b_n = -\infty$. *Podobně pro limitu* $+\infty$.

3.4 Limes inferior a limes superior

Tyto latinské termíny znamenají „nejmenší limita“ a „největší limita“.

• *Hromadné body.* Hromadné body posloupností jsou limity podposloupností.

Definice 3.4.1 (hromadné body) *$A \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti (a_n), pokud $A = \lim b_n$ pro nějakou $(b_n) \preceq (a_n)$. $H(a_n)$ $(\subset \mathbb{R}^*)$ označuje množinu hromadných bodů posloupnosti (a_n).*

Například $(a_n) = (n-1+(-1)^n n+1/n)$ má hromadné body $H(a_n) = \{-1, +\infty\}$.

Úloha 3.4.2 *Každá posloupnost má alespoň jeden hromadný bod.*

• *Limes inferior a limes superior posloupnosti.* Jak jsme už prozradili, jedná se o nejmenší, resp. největší, limitu podposloupnosti dané posloupnosti.

Definice 3.4.3 (liminf a limsup) *Pro každou posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definujeme $\liminf a_n = \min(H(a_n))$ a $\limsup a_n = \max(H(a_n))$. Minimum a maximum bereme v LU $(\mathbb{R}^*, <)$.*

Musíme ale dokázat, že tato minima a maxima existují.

Věta 3.4.4 (liminf a limsup) *Pro každou $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je $H(a_n) \neq \emptyset$. Množina $H(a_n)$ má v lineárním uspořádání $(\mathbb{R}^*, <)$ minimum i maximum.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$. $H(a_n) \neq \emptyset$ podle úlohy 3.4.2. Dokážeme existenci $\max(H(a_n))$, pro minimum se argumentuje podobně. Nechť $A = \sup(H(a_n))$, bráno v $(\mathbb{R}^*, <)$ (díky tvrzení 2.1.7 supremum A existuje). Dokážeme, že A je v $H(a_n)$. Když $A = -\infty$, je $H(a_n) = \{-\infty\}$ a jsme hotovi, $A \in H(a_n)$.

Nechť $A > -\infty$. Můžeme předpokládat, že existuje reálná posloupnost $(b_n) \subset H(a_n)$ s $\lim b_n = A$. Pro $A < +\infty$ a pro $A = +\infty \notin H(a_n)$ to plyne z definice suprema. Pro $A = +\infty \in H(a_n)$ jsme hotovi. Protože každé číslo b_n je limitou podposloupnosti posloupnosti (a_n), snadno sestrojíme podposloupnost (a_{m_n}), že pro každé n je $a_{m_n} \in U(b_n, 1/n)$. Pak $\lim a_{m_n} = \lim b_n = A$ a tedy $A \in H(a_n)$. □

Je jasné, že když limita $\lim a_n$ existuje, je $H(a_n) = \{\lim a_n\}$. Dokážeme několik dalších vlastností liminfů a limsupů posloupností.

Tvrzení 3.4.5 ($\liminf \stackrel{?}{=} \limsup$) *Vždy platí, že $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Rovnost nastává $\iff$ existuje $\lim a_n$. Pak $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$.*

Důkaz. Nerovnost je zřejmá, protože $\liminf a_n = \min(H(a_n))$ a $\limsup a_n = \max(H(a_n))$. Platí-li rovnost, je množina $H(a_n)$ jednoprvková, (a_n) nemá dvě podposloupnosti s různými limitami a podle části 2 tvrzení 2.2.4 má (a_n) limitu. Ta se rovná $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$. Pokud $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, posloupnost (a_n) má dvě podposloupnosti s různými limitami a nemá limitu. □

Věta 3.4.6 (vlastnosti liminfů a limsupů) *Nechť* (a_n) *je posloupnost,* $A = \liminf a_n$ *a* $B = \limsup a_n$.

1. *Když* $A = -\infty$*, pak pro každé* $c < 0$ *pro nekonečně mnoho* n *je* $a_n \le c$*. Když* $A = +\infty$*, pak* $\lim a_n = +\infty$*.*
2. *Když* $A \in \mathbb{R}$*, pak pro každé* ε *pro nekonečně mnoho* n *je* $a_n \le A + \varepsilon$ *& pro každé* $n \ge n_0$ *je* $a_n \ge A - \varepsilon$*.*
3. *Když* $B = +\infty$*, pak pro každé* $c > 0$ *pro nekonečně mnoho* n *je* $a_n \ge c$*. Když* $B = -\infty$*, pak* $\lim a_n = -\infty$*.*
4. *Když* $B \in \mathbb{R}$*, pak pro každé* ε *pro nekonečně mnoho* n *je* $a_n \ge B - \varepsilon$ *& pro každé* $n \ge n_0$ *je* $a_n \le B + \varepsilon$*.*

Důkaz. Dokážeme části 1 a 2. Důkaz částí 3 a 4 je úloha níže.

1. Nechť $A = -\infty$. Pak $\lim b_n = -\infty$ pro nějakou $(b_n) \preceq (a_n)$ a tvrzení zřejmě platí podle definice limity $-\infty$. Nechť $A = +\infty$. Pak $H(a_n) = \{+\infty\}$ a podle předešlého tvrzení se $\lim a_n = +\infty$.

2. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a je dáno ε. Protože existuje $(b_n) \preceq (a_n)$ s $\lim b_n = A$, jistě pro nekonečně mnoho n je $a_n \le A + \varepsilon$. Kdyby bylo $a_n < A - \varepsilon$ pro nekonečně mnoho n, měli bychom $(c_n) \preceq (a_n)$ s limitou $\lim c_n$ menší než $A - \varepsilon$. To nelze, protože $A = \min(H(a_n))$. Tedy pro každé $n \ge n_0$ je $a_n \ge A - \varepsilon$. □

Liminfy a limsupy posloupností se používají v teorii čísel. Třeba pro funkci $\tau(n)$ počtu dělitelů čísla n (například $\tau(6) = |\{1, 2, 3, 6\}| = 4$) se dá dokázat, že

$$\limsup \frac{\log(\tau(n))}{(\log 2)(\log n)/(\log\log n)} = 1\,.$$

Zde $(\tau(n)) = (1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 2, 4, \dots)$.

Úloha 3.4.7 *Dokažte části 3 a 4 poslední věty.*

Úloha 3.4.8 *Uveďte posloupnost* (a_n) *s* $H(a_n) = \mathbb{R}^*$*.*

Úloha 3.4.9 *Existuje posloupnost* (a_n)*, že* $H(a_n) = [-1, 0) \cup (0, 1]$*?*

Úloha 3.4.10 *Pro* $a_n = n(1 + (-1)^n)$ *nalezněte* $\liminf a_n$ *a* $\limsup a_n$*.*

3.5 AK řady

Dost se odchýlíme od zavedení řad v

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred3.pdf`

a vlastně vůbec od standardního zavedení řad v učebnicích analýzy.

• AK *řady.* Naším cílem je rozšířit konečné součty $\sum_{x \in X} r_x$, kde X je konečná indexová množina a $r_x \in \mathbb{R}$ (takové součty bereme jako známé), na součty se spočetnými indexovými množinami. Ovšem tak, aby se zachovala komutativita a asociativita sčítání. To se realizuje v AK řadách.

Definice 3.5.1 (AK řady) *AK řada (absolutně konvergentní řada) je každé takové zobrazení $r\colon X \to \mathbb{R}$ definované na spočetné množině X, že pro nějaké $c \geq 0$ pro každou konečnou množinu $Y \subset X$ je $\sum_{x \in Y} |r(x)| \leq c$. AK řadu zapíšeme jako $\sum_{x \in X} r_x$, s $r_x := r(x)$.*

Důležitým příkladem AK řad jsou konečné AK řady.

Definice 3.5.2 (konečné AK řady) *Konečná AK řada je každé takové zobrazení $r\colon X \to \mathbb{R}$ definované na spočetné množině X, že $r(x) \neq 0$ jen pro konečně mnoho $x \in X$. Opět je značíme symbolem $\sum_{x \in X} r_x$ s $r_x := r(x)$.*

Naše terminologie je korektní.

Úloha 3.5.3 *Každá konečná AK řada je AK řada.*

Konečný součet $\sum_{x \in X} r_x$ s konečnou X lze vždy chápat jako konečnou AK řadu: X libovolně (ale tak, abychom neinterferovali s dalšími konstrukcemi) rozšíříme spočetnou množinou $Y \supset X$ a pro $x \in Y \setminus X$ položíme $r(x) = r_x = 0$.

Je-li $\sum_{x \in X} r_x$ AK řada a $Y \subset X$, je jasné, že $\sum_{x \in Y} r_x$ je rovněž AK řada. Nazveme ji AK podřadou AK řady $\sum_{x \in X} r_x$.

- *Součty* AK *řad.* Jsou dány následující větou.

Věta 3.5.4 (součty AK řad) *Nechť $\sum_{x \in X} r_x$ je AK řada. Pak pro každou bijekci $f\colon \mathbb{N} \to X$ existuje vlastní limita*

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} r(f(i)) \quad (\in \mathbb{R})$$

a nezávisí na f. Limitu s nazveme součtem AK řady $\sum_{x \in X} r_x$. Označíme ho opět symbolem $\sum_{x \in X} r_x$.

Důkaz. Nechť $\sum_{x \in X} r_x$ je AK řada, $f, g\colon \mathbb{N} \to X$ jsou dvě bijekce a je dáno ε. Položíme

$$c = \sup(\{\textstyle\sum_{x \in Y} |r_x| :\ Y \subset X \text{ a je konečná}\})\,.$$

Vezmeme konečnou množinu $Y \subset X$, že $c - \varepsilon \leq \sum_{x \in Y} |r_x| \leq c$. Pak pro každou konečnou množinu $Z \subset X \setminus Y$ je $\sum_{x \in Z} |r_x| \leq \varepsilon$. Vezmeme n_0, že $f[\,[n_0]\,], g[\,[n_0]\,] \supset Y$. Pro každé $m, n \geq n_0$ pak je

$$\big|\textstyle\sum_{i=1}^{m} r(f(i)) - \sum_{i=1}^{n} r(g(i))\big| \leq \sum_{x \in X_m} |r_x| + \sum_{x \in Y_n} |r_x| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\,,$$

protože X_m a Y_n jsou jisté konečné množiny obsažené v $X \setminus Y$. Volba $g = f$ dává cauchyovskost posloupnosti $\big(\sum_{i=1}^{n} r(f(i)) :\ n \in \mathbb{N}\big)$. Ta má podle věty 2.3.20 vlastní limitu s. Volba $g \neq f$ ukazuje, že tato limita nezávisí na bijekci f. □

Adjektivum „absolutní" obsažené ve zkratce AK neodkazuje tolik na absolutní hodnotu, ale spíše na to, že součet AK řady nezávisí na pořadí sčítání.

Úloha 3.5.5 *Ukažte, že součet každé konečné* AK *řady chápané jako* AK *řada se rovná součtu odpovídajícího konečného součtu.*

Tvrzení 3.5.6 (aproximace součtu) *Nechť* $R = \sum_{x\in X} r_x$ *je* AK *řada se součtem* s. *Pak pro každé* ε *existuje taková konečná množina* $Y = Y(\varepsilon, R) \subset X$, *že pro každou konečnou množinu* Z *s* $Y \subset Z \subset X$ *je* $|\sum_{x\in Z} r_x - s| \le \varepsilon$.

Důkaz. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to X$ je libovolná bijekce. Vezmeme n_0, že pro $n \ge n_0$ je $|\sum_{i=1}^{n} r_{f(i)} - s| \le \varepsilon/2$ a pro každou konečnou množinu $M \subset \mathbb{N} \setminus [n_0]$ je $\sum_{i\in M} |r_{f(i)}| \le \varepsilon/2$. Položíme $Y = f[\,[n_0]\,]$. Nechť Z s $Y \subset Z \subset X$ je konečná množina. Pak

$$|\textstyle\sum_{x\in Z} r_x - s| \le |\sum_{x\in Y} r_x - s| + \sum_{x\in Z\setminus Y} |r_x| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

□

• AK *řady zobecňují konečné součty.* Nyní ukážeme, že součty AK řad jsou komutativní a asociativní. Získali jsme tedy dobré rozšíření konečných součtů na spočetné. Komutativita je zřejmý důsledek věty 3.5.4.

Důsledek 3.5.7 (komutativita AK řad) $R = \sum_{x\in X} r_x$ *buď* AK *řada. Pak pro* $\forall$ *bijekci* $f\colon X \to X$ *je* $\sum_{x\in X} r_{f(x)}$ AK *řada se stejným součtem jako* R.

Důkaz asociativity je složitější.

Věta 3.5.8 (asociativita AK řad) *Nechť* $R = \sum_{x\in X} r_x$ *je* AK *řada, která má součet* r, *a* Y *je rozklad množiny* X. *Pro každý blok* $Z \in Y$ *označíme součet* AK *podřady* $R_Z = \sum_{x\in Z} r_x$ *jako* $r(Z)$. *Pak* $S = \sum_{Z\in Y} r(Z)$ *je* AK *řada se součtem* s *rovným* r.

Důkaz. Nechť R a Y jsou, jak uvedeno. Přidáním nulových sčítanců je možné dosáhnout, že Y i každý blok $Z \in Y$ je spočetná množina. Nejprve dokážeme, že S je AK řada. Nechť

$$c = \sup(\{\textstyle\sum_{x\in Z} |r_x| :\ Z \subset X \text{ a je konečná}\})$$

a $Y' = \{Z_1, \dots, Z_n\} \subset Y$ je konečná množina. Pro $i \in [n]$ vezmeme podle tvrzení 3.5.6 konečné množiny $Z_i' = Y(2^{-i}, R_{Z_i})$ $(\subset Z_i)$. Poůložíme $Z_0 = Z_1' \cup \dots \cup Z_n'$. Pak

$$\textstyle\sum_{Z\in Y'} |r(Z)| \le \sum_{i=1}^{n} |r(Z_i) - \sum_{x\in Z_0} r_x| + |\sum_{x\in Z_0} r_x| \le 1 + c$$

a $\sum_{Z\in Y} r(Z)$ je AK řada.

Buď dáno ε. Dokážeme, že $|r - s| \le \varepsilon$. Podle tvrzení 3.5.6 vezmeme konečné množiny $X' = Y(\varepsilon/3, R)$ $(\subset X)$, $Y' = Y(\varepsilon/3, S) = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ $(\subset Y)$, $n \in \mathbb{N}$, a $Z_i' = Y(2^{-i}\varepsilon/3, R_{Z_i})$ $(\subset Z_i)$, $i \in [n]$. Nechť $X_0 = X' \cup Z_1' \cup \dots \cup Z_n'$ a $Z_n'' = (X' \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z_i') \cup Z_n'$. Pak $|r - s|$ je

$$\begin{aligned}&\le |r - \textstyle\sum_{x\in X_0} r_x| + \sum_{i=1}^{n-1} |\sum_{x\in Z_i'} r_x - r(Z_i)| + |\sum_{x\in Z_n''} r_x - r(Z_n)| + \\ &+ |\textstyle\sum_{i=1}^{n} r(Z_i) - s| \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Vskutku $|r - s| \le \varepsilon$. Protože to platí pro každé ε, nutně $r = s$. $\Box$

Úloha 3.5.9 *Proč jsme definovali množinu Z_n'' tak, jak jsme ji definovali?*

• *Lineární kombinace, suma a součin* AK *řad.* Popíšeme tři základní konstrukce nových AK řad z AK řad již definovaných. Začneme lineární kombinací.

Tvrzení 3.5.10 (LK AK řad) *Nechť $R = \sum_{x\in X} r_x$ a $S = \sum_{x\in X} s_x$ jsou* AK *řady se součty r a s. Pak $(a, b \in \mathbb{R})$*

$$T = \sum_{x\in X}(ar_x + bs_x)$$

je AK *řada se součtem $ar + bs$.*

Důkaz. Nechť c, resp. d, je kladná konstanta dosvědčující podle definice, že R, resp. S, je AK řada. Nechť $Y \subset X$ je konečná množina. Pak

$$\sum_{x\in Y} |ar_x + bs_x| \le |a| \sum_{x\in Y} |r_x| + |b| \sum_{x\in Y} |s_x| \le |a|c + |b|d\,.$$

Takže T je AK řada. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to X$ je libovolná bijekce. Pak, podle AL,

$$\lim \sum_{i=1}^n (ar_{f(i)} + bs_{f(i)}) = a \lim \sum_{i=1}^n r_{f(i)} + b \lim \sum_{i=1}^n s_{f(i)} = ar + bs\,.$$

T tedy má součet $ar + bs$. $\Box$

Suma a součin jsou už více množinové konstrukce. Důkaz první z nich ponecháme jako úlohu.

Úloha 3.5.11 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 3.5.12 (suma AK řad) *Nechť $R = \sum_{x\in X} r_x$ a $S = \sum_{y\in Y} s_y$ jsou* AK *řady na disjunktních množinách X a Y, se součty r a s. Pak*

$$T = \sum_{x\in X\cup Y} t_x,\ \text{kde } t_x = r_x \text{ pro } x \in X \text{ a } t_x = s_x \text{ pro } x \in Y\,,$$

je AK *řada se součtem t rovným $r + s$.*

Věta 3.5.13 (součin AK řad) *Nechť $R = \sum_{x\in X} r_x$ a $S = \sum_{y\in Y} s_y$ jsou* AK *řady se součty r a s. Pak*

$$T = \sum_{(x,\,y)\in X\times Y} r_x s_y$$

je AK *řada se součtem t rovným rs.*

Důkaz. Dokážeme, že T je AK řada. Nechť horní mez c, resp. d, dosvědčuje podle definice, že R, resp. S, je AK řada a nechť $Z \subset X \times Y$ je konečná množina. Vezmeme konečné množiny $X' \subset X$ a $Y' \subset Y$, že $Z \subset X' \times Y'$. Pak

$$\sum_{(x,\,y)\in Z} |r_x s_y| \le \sum_{x\in X'} |r_x| \cdot \sum_{y\in Y'} |s_y| \le cd$$

a T je AK řada. Pro dané $\varepsilon \le 1$ dokážeme, že $|t - rs| \le \varepsilon$. Podle tvrzení 3.5.6 zvolíme konečné množiny $Z = Y(\varepsilon/3, T)$ $(\subset X \times Y)$, $X' = Y(\varepsilon/3(|s|+1), R)$ $(\subset X)$ a $Y' = Y(\varepsilon/3(|r|+1), S)$ $(\subset Y)$. Vezmeme konečné množiny X'' a Y'', že $X' \subset X'' \subset X$, $Y' \subset Y'' \subset Y$ a $Z \subset X'' \times Y''$. Pak $|t - rs|$ je nejvýše

$$
\begin{aligned}
&|t - \textstyle\sum_{(x,\,y)\in X''\times Y''} r_x s_y| + |\sum_{x\in X''} r_x \cdot \sum_{y\in Y''} s_y - rs| \le \\
&\le \tfrac{\varepsilon}{3} + |(r+\delta)(s+\theta) - rs| \ \text{ s } \ |\delta| \le \tfrac{\varepsilon}{3(|s|+1)} \ \text{ a } \ |\theta| \le \tfrac{\varepsilon}{3(|r|+1)}\,.
\end{aligned}
$$

Takže $|t - rs| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Platí to pro každé ε a proto $t = rs$. $\square$

• AK *řady versus standardní řady.* Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, což je vlastně posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, se součet standardně definuje jako $\lim(a_1 + \cdots + a_n)$, když tato limita existuje. Výhodou této definice je její jednoduchost. Jsou tu ale dvě nevýhody. Definuje se pojem, který nefunguje, jak potřebujeme — v první přednášce jsme v prvním paradoxu viděli, že takový součet obecně závisí na pořadí sčítanců. Standardně se absolutně konvergentní řady zavádějí až následně, my jsme je zde zavedli hned na začátku. Většina aplikací řad, i když ne všechny, pracuje s absolutně konvergentními řadami. Druhou nevýhodou standardního pojetí řad je přílišná svázanost s indexovou množinou $\mathbb{N}$. Například důkaz exponenciální identity (předvedeme ho ve větě 4.3.4), což je jedna ze základních aplikací absolutně konvergentních řad, lze provést přirozeně, elegantně a dostatečně přesně právě v rámci AK řad, pomocí vět 3.5.8 a 3.5.13.

Kapitola 4

Přednáška 4. Řady. Limity funkcí. Elementární funkce

Na rozdíl od posledního oddílu, kde jsme zavedli AK řady, v prvním oddílu kapitoly založené na čtvrté přednášce

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred4.pdf`

přednesené 14. 3. 2024 pojmeme řady standardním způsobem. V tvrzení 4.1.10 dokážeme divergenci harmonické řady a ve větě 4.1.22 odvodíme vzorec pro součet geometrické řady. Riemannova věta 4.1.17 popisuje třídu řad, jejichž součet lze přerovnáním libovolně změnit. V oddílu 4.2 zobecníme limity reálných posloupností na limity funkcí. Dokážeme větu 4.2.12 o Heineho definici limity funkce, která převádí limity funkcí na limity posloupností. V oddílu 4.3 uvedeme na scénu Základní elementární funkce: konstanty, $\exp x$, $\log x$, a^b, $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$ a inverzy posledních čtyř. Ve větě 4.3.4 dokážeme exponenciální identitu $\exp x \cdot \exp y = \exp(x + y)$.

Nové jsou oddíly 4.4 a 4.5. Zavedeme Opravdu základní elementární funkce. Definice 4.4.4 a 4.4.13 jasně vymezují Elementární funkce jako funkce, které vzniknou ze Základních elementárních funkcí opakovaným sčítáním, násobením, dělením a skládáním. V definici 4.5.1, resp. 4.5.6, pojmeme novým způsobem polynomy, resp. racionální funkce.

4.1 Standardní řady

V oddílu 3.5 jsme zavedli AK řady s komutativními a asociativními součty. Nyní zavedeme řady standardně.

• *Řady všeobecně.* <u>Řada</u> je posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Značíme ji symboly $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nebo i $a_1 + a_2 + \cdots$. Čísla a_n jsou její <u>sčítance</u>. Její <u>součet</u> je limita

$$\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \ \ (\in \mathbb{R}^*)\,,$$

existuje-li. Značíme ho opět $\sum a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nebo $a_1 + a_2 + \cdots$. Členy posloupnosti $(s_n) \equiv (a_1 + \cdots + a_n)$ jsou částečné součty s_n řady. Součet řady je tedy limita $\lim s_n$. Řada s vlastním součtem konverguje, jinak diverguje.

Úloha 4.1.1 *Konvergence a divergence řady jsou robustní vlastnosti.*

Pro součty ale platí následující.

Úloha 4.1.2 *Pro každou konvergentní řadu se změnou libovolného jediného sčítance její součet změní.*

Úloha 4.1.3 *Každá řada $a_1 + a_2 + \dots$, pro níž pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \geq 0$, má součet a ten není $-\infty$. Podobně každá řada se skoro všemi sčítanci nekladnými má součet, který není $+\infty$.*

Úloha 4.1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$.

Přerovnáním řady $\sum a_n$ rozumíme řadu $\sum a_{f(n)}$, kde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce.

Tvrzení 4.1.5 (komutativní součty) *Má-li řada $\sum a_n$ jen konečně mnoho záporných sčítanců nebo jen konečně mnoho kladných sčítanců, pak všechna její přerovnání mají stejný součet A.*

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ má jen konečně mnoho kladných sčítanců s indexy $I \subset \mathbb{N}$, $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou bijekce a $s_n \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{f(i)}$, $t_n \equiv \sum_{i=1}^{n} a_{g(i)}$. Vezmeme m, že $f[\,[m]\,], g[\,[m]\,] \supset I$. Pak (s_n) a (t_n) od indexu m nerostou a podle důsledku 2.3.4 obě mají limitu. Dále není těžké vidět, že pro každé $n_1 \geq m$ existují $n_2, n_3 \geq m$, že $t_{n_2} \leq s_{n_1}$ a $s_{n_3} \leq t_{n_1}$. Tedy $\lim s_n = \lim t_n$. V případě, že $\sum a_n$ má jen konečně mnoho záporných sčítanců, argumentujeme podobně. □

Nutnou podmínkou konvergence řady $\sum a_n$ je, že $\lim a_n = 0$. Dokazuje to následující tvrzení.

Tvrzení 4.1.6 (NPK řady) *Když $\sum a_n$ konverguje, pak se $\lim a_n = 0$.*

Důkaz. Nechť pro řadu $\sum a_n$ je součet $s = \lim s_n = \lim(a_1 + \cdots + a_n)$ vlastní. Pak $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$. □

Pokud tedy $\lim a_n$ neexistuje nebo není 0, řada $\sum a_n$ diverguje. Pro součet $\pm\infty$ NKP pochopitelně neplatí.

Úloha 4.1.7 *Zdůvodněte rovnosti v závěrečném výpočtu v důkazu.*

• *Harmonická řada*. Je to řada $\sum \frac{1}{n}$. I když $\lim \frac{1}{n} = 0$, uvidíme, že tato řada diverguje a má součet $+\infty$.

Úloha 4.1.8 *Když (a_n) neklesá a má podposloupnost s limitou $+\infty$, potom též* $\lim a_n = +\infty$.

Úloha 4.1.9 *Když řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ splňují pro každé $n \ge n_0$, že $a_n \ge b_n$, a když součet $\sum b_n = +\infty$, potom i součet $\sum a_n = +\infty$.*

Tvrzení 4.1.10 (součet harmonické řady) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots = +\infty$.

Důkaz. Vezmeme řadu $\sum b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$. Obecně $b_{2^k} = b_{2^k+1} = \cdots = b_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2^{k+1}}$. Pro $\forall\, n$ je $\frac{1}{n} \ge b_n$. Částečné součty (s_n) řady $\sum b_n$ rostou a pro $k \in \mathbb{N}_0$ se $s_{2^{k+1}-1} = \frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{k+1}{2}$. Podle úlohy 4.1.8 se součet $\sum b_n = \lim s_n = +\infty$. Podle úlohy 4.1.9 i součet $\sum \frac{1}{n} = +\infty$. □

Podle tvrzení 4.1.5 každé přerovnání harmonické řady má součet $+\infty$. Její částečné součty $(h_n) = (1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \dots)$ $(\subset \mathbb{Q})$ jsou tzv. <u>harmonická čísla</u>. Že jdou do $+\infty$ dokázal už v r. 1350 francouzský scholastik *Mikuláš Oresme (mezi 1320 až 1325–1382)*.

Věta 4.1.11 (asymptotika čísel h_n) *Pro $n \in \mathbb{N}$ se harmonická čísla*

$$h_n = \log n + \gamma + a_n, \ \text{ kde } a_n = O(1/n)\,.$$

Zde $\gamma = 0.57721\dots$ je tzv. <u>Eulerova konstanta</u> a symbolika $a_n = O(1/n)$ znamená, že $|a_n| \le c/n$ pro nějakou konstantu $c > 0$.

Tuto větu dokážeme v přednášce 14 pomocí integrálů. Asymptotické značení včetně $O(\cdot)$ zavedeme v oddílu 5.5.

Úloha 4.1.12 *Dokažte, že $h_n \in \mathbb{N} \iff n = 1$. Návod: $m = (2l-1)2^k$.*

Úloha 4.1.13 (zatím nevyřešeno) *Eulerova konstanta γ je iracionální číslo.*

• *Riemannova věta.* V první přednášce jsme se setkali s řadou $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots$ se součtem 0. Ten jsme přerovnáním sčítanců změnili na kladný. Ve větě níže dokážeme, že vhodným přerovnáním můžeme získat libovolný součet. Začneme ale méně obecnými změnami součtů. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Indexy jejích nezáporných sčítanců označíme jako $k_1 < k_2 < \dots$ a podobně jako $z_1 < z_2 < \dots$ označíme indexy jejích záporných sčítanců. Je-li indexů k_n nekonečně mnoho, podle tvrzení 4.1.5 mají všechna přerovnání řady $\sum a_{k_n}$ stejný součet. Totéž platí pro případnou řadu $\sum z_n$.

Tvrzení 4.1.14 (součet $\pm\infty$) *$\sum a_n$ má přerovnání se součtem $-\infty$ $\iff$ součet $\sum a_{z_n} = -\infty$. Podobně $\sum a_n$ má přerovnání se součtem $+\infty$ $\iff$ součet $\sum a_{k_n} = +\infty$.*

Důkaz. Dokážeme první tvrzení a důkaz druhého přenecháme úloze. Nechť $\sum a_{z_n} = -\infty$. Můžeme předpokládat, že indexů k_n je nekonečně mnoho. Je-li jich jen konečně mnoho, podle tvrzení 4.1.5 má každé přerovnání řady $\sum a_n$ součet $-\infty$. Bijekci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pro níž součet $\sum a_{f(n)} = -\infty$, sestrojíme v podobě prostých posloupností $P_k = (m_{n,k}) \subset \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, jejichž členy jsou indexy k_n a z_n. Začneme posloupností $P_0 = (z_n)$. V P_0 vezmeme nějaký počáteční úsek U_1, že $\sum_{i \in U_1} a_i \le -1 - a_{k_1}$. Za U_1 vložíme do P_0 index k_1 a dostaneme tak posloupnost P_1. V P_1 vezmeme nějaký počáteční úsek U_2, že $|U_2| > |U_1|$ a $\sum_{i \in U_2} a_i \le -2 - a_{k_2}$. Za U_2 vložíme do P_1 index k_2 a dostaneme tak posloupnost P_2. A tak dál. P_0, P_1, P_2, ... zřejmě konvergují (vzhledem k $|U_1| < |U_2| < \dots$) ke hledané bijekci f.

Nechť není pravda, že $\sum a_{z_n} = -\infty$. Pak buď existuje jen konečně mnoho indexů z_n, anebo součet $\sum a_{z_n} \in \mathbb{R}$. V prvním případu podle tvrzení 4.1.5 všechna přerovnání řady $\sum a_n$ mají stejný součet, který jistě není $-\infty$. Ve druhém případu existuje c, že pro každé n je $\sum_{i=1}^n a_{z_i} \ge c$. Odtud plyne, že žádné přerovnání řady $\sum a_n$ nemá součet $-\infty$. □

Úloha 4.1.15 *Druhou část předešlého tvrzení dokažte redukcí na první část.*

Tvrzení 4.1.16 (neexistence součtu) *Řada $\sum a_n$ má přerovnání bez součtu $\iff$ součet $\sum a_{z_n} = -\infty$ a součet $\sum a_{k_n} = +\infty$.*

Důkaz. Nechť součet $\sum a_{z_n} = -\infty$ a součet $\sum a_{k_n} = +\infty$. Vezmeme počáteční úsek U_1 posloupnosti (z_n), že $\sum_{i \in U_1} a_i \le -1$. Vezmeme počáteční úsek V_1 posloupnosti (k_n), že $\sum_{i \in V_1} a_i \ge 2$. Vezmeme počáteční úsek U_2 posloupnosti $(z_n) \setminus U_1$, že $\sum_{i \in U_2} a_i \le -2$. Vezmeme počáteční úsek V_2 posloupnosti $(k_n) \setminus V_1$, že $\sum_{i \in V_2} a_i \ge 2$. A tak dá. Posloupnost

$$U_1 V_1 U_2 V_2 \ldots \subset \mathbb{N}$$

je bijekce f z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ a řada $\sum a_{f(n)}$ nemá součet, protože jak $\sum_{i=1}^n a_{f(i)} \le -1$, tak $\sum_{i=1}^n a_{f(i)} \ge 1$ pro nekonečně mnoho n.

Nechť například součet $\sum a_{z_n} \in \mathbb{R}$. V případu, že $\sum a_{k_n} \in \mathbb{R}$, argumentujeme podobně. Pokud součet $\sum a_{k_n} = +\infty$, lehce se vidí, že každé přerovnání řady $\sum a_n$ má součet $+\infty$. Pokud i $\sum a_{k_n} \in \mathbb{R}$, řada $\sum a_n$ je AK řada a podle věty 3.5.4 mají všechna její přerovnání týž (vlastní) součet. □

Věta 4.1.17 (Riemannova) *Když řada $\sum a_n$ splňuje, že $\lim a_n = 0$, součet $\sum a_{k_n} = +\infty$ a součet $\sum a_{z_n} = -\infty$, pak pro každé $A \in \mathbb{R}^*$ má $\sum a_n$ přerovnání se součtem A. Také má přerovnání bez součtu.*

Důkaz. Případy $A = \pm\infty$ řeší tvrzení 4.1.14. Případ neexistujícího součtu řeší tvrzení 4.1.16. Nechť $A = b \in \mathbb{R}$. Induktivně definujeme prostou posloupnost $(p_n) \subset \mathbb{N}$, která je bijekcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ a pro kterou se součet $\sum_{n=1}^\infty a_{p_n} = b$. Během konstrukce budeme označovat (od začátku) členy posloupností (z_n) a (k_n) jako „použité“. Začneme se všemi členy obou posloupností nepoužitými. Položíme $p_1 = k_1$ a index k_1 označíme jako použitý. Nechť už jsou p_1, p_2, ..., p_n definované a $s_n \equiv \sum_{i=1}^n a_{p_i}$. Pokud $s_n \le b$, pak p_{n+1} je první nepoužitý člen posloupnosti (k_n), který označíme jako použitý. Pokud $s_n > b$, pak p_{n+1} je první nepoužitý člen posloupnosti (z_n), který označíme jako použitý.

Není těžké vidět, že pro nekonečně mnoho n platí jak $s_n \le b$, tak $s_n > b$. Tedy vyčerpáme (z_n) i (k_n) a (p_n) je bijekce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Pro každé $n \ge n_0$ je

$$s_n \in [b + a_{z_{i_n}},\ b + a_{k_{j_n}}]\,,$$

přičemž $\lim i_n = \lim j_n = +\infty$. Protože $\lim a_n = 0$, je $\lim s_n = b$. □

Německý matematik *Bernhard Riemann (1826–1866)* odhalil souvislost komplexní funkce $\zeta(s) = \sum 1/n^s$ s rozložením prvočísel.

• *Absolutně konvergentní řady.* Tyto řady jsme značně obecně probrali už v minulém oddílu 3.5 o AK řadách. Zde se na ně podíváme standardně.

Definice 4.1.18 (abskon řady) *$\sum a_n$ je <u>absolutně konvergentní</u> řada (<u>abskon</u> řada), pokud součet $\sum |a_n| < +\infty$.*

Je jasné, že každá abskon řada je AK řada.

Věta 4.1.19 (nekonečná Δ-ová nerovnost) *$\sum a_n$ buď abskon řada. <u>Potom</u> $\sum a_n$ konverguje a pro součty platí nerovnost $|\sum a_n| \le \sum |a_n|$.*

Důkaz. Nechť $\sum a_n$ je abskon řada s částečnými součty (s_n) a $\sum |a_n|$ má částečné součty (t_n). Konvergence řady $\sum a_n$ plyne z věty 3.5.4, ale zde ji dokážeme bez pomoci této věty. Podle předpokladu a věty 2.3.20 je (t_n) Cauchyova posloupnost. Pro dané ε tedy pro každé dva velké indexy $m \le n$ platí nerovnost

$$|t_n - t_m| = \big||a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n|\big| = |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| \le \varepsilon$$

(pro $m = n$ jsou tyto součty nulové). Díky konečné Δ-ové nerovnosti tedy pro stejné indexy $m \le n$ platí i nerovnosti

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| \le |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| \le \varepsilon$$

a (s_n) je Cauchyova posloupnost. Podle věty 2.3.20 posloupnost (s_n) konverguje. Tedy řada $\sum a_n$ konverguje.

Díky konečné Δ-ové nerovnosti pro každé n platí nerovnost $|s_n| \le t_n$, ekvivalentně $-t_n \le s_n \le t_n$. Limitním přechodem $n \to \infty$ dostáváme podle věty 3.3.2 pro součty nerovnosti $-\sum |a_n| \le \sum a_n \le \sum |a_n|$ a tedy $\big|\sum a_n\big| \le \sum |a_n|$. □

Úloha 4.1.20 *Každé přerovnání abskon řady je abskon řada.*

Tvrzení 4.1.21 (o abskon řadách) *$\sum a_n$ je abskon řada $\iff$ všechna její přerovnání mají týž vlastní součet.*

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$ plyne z věty 3.5.4. Pokud $\sum a_n$ není abskon řada, pak součet $\sum a_{z_n} = -\infty$ nebo součet $\sum a_{k_n} = +\infty$ a podle tvrzení 4.1.14 některé přerovnání této řady nemá vlastní součet. □

• *Geometrické řady.* Jsou to řady tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$, kde $q \in \mathbb{R}$ je <u>kvocient</u> řady.

Věta 4.1.22 (součet GŘ) *Součet* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *je* $\frac{1}{1-q}$ *pro* $-1 < q < 1$, $+\infty$ *pro* $q \geq 1$ *a neexistuje pro* $q \leq -1$.

Důkaz. Pro každé $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí identita

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \tfrac{1-q^n}{1-q} = \tfrac{1}{1-q} + \tfrac{q^n}{q-1}\,.$$

Pro $q < -1$ tedy podle AL máme $\lim s_{2n-1} = +\infty$ a $\lim s_{2n} = -\infty$, tedy $\lim s_n$ neexistuje. Pro $q = -1$ je podobně $s_{2n-1} = 1$ a $s_{2n} = 0$, řada opět nemá součet. Pro $-1 < q < 1$ je $\lim q^n = 0$, takže podle AL máme součet $\lim s_n = \frac{1}{1-q}$. Pro $q = 1$ se $s_n = n$, takže máme součet $\lim s_n = +\infty$. Pro $q > 1$ se $\lim q^n = +\infty$ a podle AL máme součet $\lim s_n = +\infty$. □

Jednou z aplikací tohoto vzorce je třeba rovnost desetinného rozvoje a zlomku

$$27.272727\cdots = 27(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \dots) = 27 \cdot \tfrac{1}{1-10^{-2}} = \tfrac{27\cdot 100}{99} = \tfrac{300}{11}\,.$$

Úloha 4.1.23 *Pro* $q \in (-1, 1)$ *a* $m \in \mathbb{Z}$ *platí, že* $q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots = \frac{q^m}{1-q}$.

Úloha 4.1.24 *Která geometrická řada je abskon?*

• *Zeta (dzéta) funkce/řada* $\zeta(s)$. Je to funkce $\zeta(s)\colon \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}$ definovaná řadou $\zeta(s) = \sum n^{-s}$. Zde uvažujeme jen reálné s. Použijeme funkci reálné mocniny a^b pro $a > 0$, kterou zavedeme za chvíli v oddílu 4.3.

Definice 4.1.25 (řada $\zeta(s)$) *Pro* $s \in \mathbb{R}$ *řada* $\zeta(s)$ *je* $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$.

Její konvergenci rozhodneme Cauchyovým kondenzačním kritériem.

Věta 4.1.26 (CKK) *Nechť* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$ *jsou reálná čísla. Potom řada* $\sum a_n$ *konverguje* $\iff$ *řada* $R = \sum 2^n \cdot a_{2^n}$ *konverguje.*

Důkaz. Nechť R má součet $+\infty$. Tedy i $\frac{1}{2}R = \sum 2^{n-1} \cdot a_{2^n}$ má součet $+\infty$. Platí nerovnosti $a_2 \geq a_2$, $a_3 + a_4 \geq 2a_4$, $a_5 + \cdots + a_8 \geq 4a_8$, $\dots$, $\sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_j \geq 2^{k-1} a_{2^k}$, $\cdots$. Sečtení dává, že součet $\sum a_n = +\infty$. Nechť R konverguje. Platí nerovnosti $a_2 + a_3 \leq 2a_2$, $a_4 + \cdots + a_7 \leq 4a_4$, $\dots$, $\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j \leq 2^k a_{2^k}$, $\cdots$. Sečtení dává, že řada $\sum a_n$ konverguje. □

Věta 4.1.27 (o zeta funkci) *Pro* $s \leq 1$ *má řada* $\zeta(s)$ *součet* $+\infty$. *Pro* $s > 1$ *tato řada konverguje.*

Důkaz. Dokázat první tvrzení je úloha níže. Nechť $s > 1$. Řada R z CKK pro řadu $\zeta(s)$ je

$$\textstyle\sum 2^n/(2^n)^s = \sum (1/2^{s-1})^n\,.$$

Protože $0 < 1/2^{s-1} < 1$, tato geometrická řada konverguje a podle věty 4.1.26 řada $\zeta(s)$ konverguje. □

V *MA 1*$^+$ dokážeme, že $\zeta(2) = \pi^2/6$. Je to jeden z nejslavnějších výsledků švýcarského matematika *Leonharda Eulera (1707–1783)*. V *MA 1*$^+$ též dokážeme, že $\zeta(3)$ je iracionální číslo.

Úloha 4.1.28 *Dokažte, že pro $s \le 1$ se součet řady $\zeta(s)$ rovná $+\infty$.*

Úloha 4.1.29 *Pro která reálná s konverguje řada $\sum_{n\ge 2} 1/n(\log n)^s$?*

4.2 Limity funkcí

Limity reálných posloupností, což jsou vlastně funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, rozšíříme na obecné funkce z M do $\mathbb{R}$ pro libovolnou množinu $M \subset \mathbb{R}$.

• *Prstencová okolí a limitní body.* Pro $A \in \mathbb{R}^*$ známe ε-okolí $U(A, \varepsilon)$. Prstencové ε-okolí prvku A je definováno jako

$$P(A, \varepsilon) = U(A, \varepsilon) \setminus \{A\}\,.$$

Prvek $L \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, když

$$\forall \varepsilon \big(P(L, \varepsilon) \cap M \ne \emptyset\big)\,.$$

Množinu limitních bodů množiny $M \subset \mathbb{R}$ označíme jako $\underline{L(M)}$ ($\subset \mathbb{R}^*$).

Úloha 4.2.1 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 4.2.2 (o limitních bodech) *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$. Následující tvrzení jsou vzájemně ekvivalentní.* (1) $A \in L(M)$. (2) *Existuje posloupnost* $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ *s* $\lim a_n = A$. (3) *Existuje prostá posloupnost* $(a_n) \subset M$ *s* $\lim a_n = A$. (4) *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $P(A, 1/n) \cap M \ne \emptyset$.*

Úloha 4.2.3 *Žádná konečná množina $M \subset \mathbb{R}$ nemá limitní bod.*

Úloha 4.2.4 *Každá nekonečná množina $M \subset \mathbb{R}$ má limitní bod.*

Úloha 4.2.5 *Když $b \in L(M)$, pak i $b \in L(M \setminus \{b\})$.*

• *Reálné funkce a jejich limity.* Zavedeme a připomeneme následující značení.

Definice 4.2.6 (značení funkcí) *Pro $M \subset \mathbb{R}$ je $\underline{\mathcal{F}(M)} = \{f :\ f\colon M \to \mathbb{R}\}$. Klademe $\underline{\mathcal{R}} = \bigcup_{M \subset \mathbb{R}} \mathcal{F}(M)$. Pro $f \in \mathcal{F}(M)$ definujeme $\underline{Z(f)} = \{b \in M : f(b) = 0\}$. Definiční obor funkce $g\colon X \to Y$ je $M(g) = X$.*

Definice 4.2.7 (limita funkce) *Nechť je $f \in \mathcal{F}(M)$, $A \in L(M)$ a $L \in \mathbb{R}^*$. Když pro každé ε existuje δ, že*

$$f[P(A, \delta)] \subset U(L, \varepsilon)\,, \tag{*}$$

píšeme $\lim_{x \to A} f(x) = L$ a řekneme, že funkce f má v A limitu L.

Ano, vzhledem k definici obrazu množiny funkcí v první přednášce stačí místo $f[P(A,\delta) \cap M]$ psát jen $f[P(A,\delta)]$. Limita nezávisí na hodnotě $f(A)$. Funkce f ani nemusí, a pro $A = \pm\infty$ ani nemůže, být v prvku A definovaná. Pro posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, což je funkce $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, se $\lim_{x\to+\infty} a(x) = \lim a_n$.

Úloha 4.2.8 *Jaké další limitní body má množina* $\mathbb{N}$ *(*$\subset \mathbb{R}$*) kromě* $+\infty$*?*

Pro $A = a \in \mathbb{R}$ & $L = b \in \mathbb{R}$ můžeme vztah $\lim_{x\to a} f(x) = b$ zapsat jako

$$\forall\,\varepsilon\,\exists\,\delta\,\big(x \in M(f) \wedge 0 < |x-a| \le \delta \Rightarrow |f(x)-b| \le \varepsilon\big)$$

— připomínáme, že máme raději bezpečnější neostré nerovnosti. Ne vždy literatura jasně říká, že pro $f \in \mathcal{F}(M)$ a $A \notin L(M)$ není $\lim_{x\to A} f(x)$ definovaná. Pro nějaké δ pak je totiž $P(A,\delta)\cap M = \emptyset$ a $f[P(A,\delta)] = \emptyset$. Inkluze (*) v definici by pak platila pro každé L a každé ε. Pokud napíšeme, že $\lim_{x\to A} f(x)$ existuje, implicitně se tím rozumí, že $A \in L(M(f))$.

Tvrzení 4.2.9 (jednoznačnost limity) *Limita funkce je jednoznačná — když* $\lim_{x\to K} f(x) = L$ *i* $\lim_{x\to K} f(x) = L'$*, pak* $L = L'$.

Důkaz. Pro každé ε existuje δ, že množina $f[P(K,\delta)]$ $(\neq \emptyset)$ je obsažená v $U(L,\varepsilon)$ i v $U(L',\varepsilon)$. Tedy $\forall\varepsilon\big(U(L,\varepsilon)\cap U(L',\varepsilon) \neq \emptyset\big)$. Podle úlohy 2.1.13 se $L = L'$. □

Limita restrikce funkce se rovná limitě původní funkce.

Tvrzení 4.2.10 (limita restrikce) *Nechť* $f \in \mathcal{F}(M)$*,* X *je libovolná množina,* $A \in L(X \cap M)$ *a nechť* $\lim_{x\to A} f(x) = L$*. Pak i* $\lim_{x\to A}(f \mid X)(x) = L$.

Důkaz. Pro dané ε existuje δ, že $f[P(A,\delta)] \subset U(L,\varepsilon)$. Z inkluze $P(A,\delta)\cap(X \cap M) \subset P(A,\delta)\cap M$ a z definice restrikce funkce dostáváme inkluze

$$(f \mid X)[P(A,\,\delta)] \subset f[P(A,\,\delta)] \subset U(L,\,\varepsilon)\,.$$

Tedy $\lim_{x\to A}(f \mid X)(x) = L$. □

Úloha 4.2.11 *Uveďte příklad, kdy* $f \in \mathcal{F}(M)$*,* X *je množina a* $\lim_{x\to A} f(x)$ *neexistuje, ale* $\lim_{x\to A}(f \mid X)(x)$ *existuje (speciálně* $A \in L(X \cap M)$*).*

• *Heineho definice limity funkce.* Viděli jsme, že limita posloupnosti je speciálním případem limity funkce. Německý matematik *Eduard Heine (1821–1881)* ukázal, jak naopak limitu funkce zredukovat na limitu posloupnosti.

Věta 4.2.12 (Heineho definice LF) *Nechť je* $f \in \mathcal{F}(M)$ *a* $K \in L(M)$*. Pak* $\lim_{x\to K} f(x) = L \iff$ *pro každou posloupnost* $(a_n) \subset M \setminus \{K\}$ *s* $\lim a_n = K$ *se* $\lim f(a_n) = L$.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Nechť $\lim_{x\to K} f(x) = L$, $(a_n) \subset M \setminus \{K\}$ má limitu K a je dáno ε. Pak existuje δ, že pro $\forall\, x \in P(K,\delta) \cap M$ je $f(x) \in U(L,\varepsilon)$. Pro toto δ existuje n_0, že pro každé $n \geq n_0$ je $a_n \in P(K,\delta) \cap M$. Tedy $n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(L,\varepsilon)$ a $f(a_n) \to L$.

Obměna $\neg \Rightarrow \neg$. Nechť neplatí, že $\lim_{x\to K} f(x) = L$. Pak $\exists\, \varepsilon$, že pro $\forall\, \delta$ $\exists\, b = b(\delta) \in P(K,\delta) \cap M$ s $f(b) \notin U(L,\varepsilon)$. Pro n v $\mathbb{N}$ vezmeme $\delta = \frac{1}{n}$ a pro $\forall\, n$ vybereme bod $b_n = b(\frac{1}{n}) \in P(K, 1/n) \cap M$, že $f(b_n) \notin U(L,\varepsilon)$. Pak $(b_n) \subset M \setminus \{K\}$ a $\lim b_n = K$, ale $\neg\big(\lim f(b_n) = L\big)$. Pravá strana ekvivalence tedy neplatí. $\square$

V důkazu obměny $\neg \Rightarrow \neg$ jsme použili axiom výběru, viz *MA 1*$^+$.

Úloha 4.2.13 *Jak jsme ho použili?*

- *Pár limit.* Spočítáme si jednu limitu funkce. Díky identitám $x - y = \frac{x^2-y^2}{x+y}$ a $\frac{x}{y} = \frac{1}{y/x}$ vidíme, že $\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\big) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+1/(+\infty)}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Úloha 4.2.14 *Spočítejte limity*
1. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$,
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ *a*
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

4.3 Základní elementární funkce

Postupně zavedeme pět podmnožin v $\mathcal{R}$: Základní elementární funkce (ZEF), Elementární funkce (EF), Opravdu základní elementární funkce (OZEF), polynomy (POL) a racionální funkce (RAC).

Definice 4.3.1 (ZEF) *Základní elementární funkce, zkratkou* ZEF*, jsou konstantní funkce (konstanty)* $k_c(x)$ *s* $c \in \mathbb{R}$, $\exp x$, $\log x$, a^x *s* $a > 0$, x^b *s* $b \in \mathbb{R}$, 0^x, x^m *s* $m \in \mathbb{Z}$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ *a* $\operatorname{arccot} x$.

Teď postupně všechny tyto funkce definujeme.

- *Konstantní funkce čili konstanty* jsou funkce $k_c\colon \mathbb{R} \to \{c\}$ s $c \in \mathbb{R}$. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ tedy $k_c(x) = c$.

Úloha 4.3.2 *Kolik je konstantních funkcí?*

- *Exponenciála* $\exp x = \exp(x) = \mathrm{e}^x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dána součtem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (zde $0^0 = 1$).

Úloha 4.3.3 *Pro každé reálné* x *je* $\exp x$ *abskon řada, tudíž i* AK *řada.*

Pomocí AK řad dokážeme exponenciální identitu.

Věta 4.3.4 (exponenciální identita) $\forall\, x,\, y\, \big(\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)\big)$.

Důkaz. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Věty 3.5.13 a 3.5.8 dávají rovnosti součtů

$$\exp x \cdot \exp y = \textstyle\sum_{(m,\, n)\in\mathbb{N}_0^2} \frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{m,\, n\in\mathbb{N}_0 \\ m+n=k}} \frac{x^m}{m!}\cdot\frac{y^n}{n!}\,,$$

protože $\exp x$ je AK řada. Díky algebraické úpravě a úloze 2.2.9 se poslední součet rovná $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m y^{k-m} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x+y)^k = \exp(x+y)$. $\Box$

Úloha 4.3.5 *Dokažte části 1–3 následujícího tvrzení.*

Tvrzení 4.3.6 (vlastnosti e^x) *Pro exponenciálu platí následující.*

1. *Je* $\exp 0 = 1$ *a pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $\exp x > 0$ *a* $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.
2. *Pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$ *platí, že* $x < y \Rightarrow \exp x < \exp y$.
3. *Platí limity* $\lim_{x\to-\infty}\exp x = 0$ *a* $\lim_{x\to+\infty}\exp x = +\infty$.
4. *Funkce* $\exp$ *je bijekce z* $\mathbb{R}$ *do* $(0, +\infty)$.

Část 4 dokážeme v důsledku 6.3.3.

• Eulerovo číslo e je $\mathrm{e} = \exp 1 = \sum_{n\ge 0}\frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = 2.71828\cdots$.

Úloha 4.3.7 *Dokažte, že číslo* e *je iracionální. Návod: rovnici* $\sum_{j\ge 0}\frac{1}{j!} = \frac{n}{m}$ *vynásobte číslem* $m!$.

• *(Přirozený) logaritmus* $\log\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Je to inverz exponenciály, $\log = \exp^{-1}$. Jeho vlastnosti tak dostaneme invertováním vlastností exponenciály.

Úloha 4.3.8 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 4.3.9 (vlastnosti logaritmu) *Platí následující.*

1. *Je* $\log 1 = 0$ *a pro každé* $x, y > 0$ *platí, že* $\log xy = \log x + \log y$ *a že* $x < y \Rightarrow \log x < \log y$.
2. *Platí, že* $\lim_{x\to 0}\log x = -\infty$ *a* $\lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$.
3. *Funkce* $\log$ *je bijekce z* $(0, +\infty)$ *do* $\mathbb{R}$.

• *Reálná mocnina* a^b. V ní a je základ a b je exponent. Uvedeme dvě vzájemně neporovnatelné definice dvou systémů funkcí s jednou proměnnou. První je založena na vztahu $a^b = \exp(b\log a)$ a jeho rozšíření limitou $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$. Druhá používá opakované násobení.

Definice 4.3.10 (a^b analyticky) *Definujeme tři systémy funkcí.*
1. *Pro* $a > 0$ *se funkce* $a^x = \exp(x \log a)$ & *je v* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
2. *Pro* $b > 0$ *se funkce* $x^b = \exp(b \log x) \cup \{(0,0)\}$ *a je v* $\mathcal{F}([0,+\infty))$. *Pro* $b \le 0$ *se funkce* $x^b = \exp(b \log x)$ *a je v* $\mathcal{F}((0,+\infty))$.
3. *Funkce* $0^x = k_0 \mid (0,+\infty)$.

Zde hodnotu 0^0 nedefinujeme a vždy $a^b \ge 0$. Liché odmocniny, to jest $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $\sqrt[5]{x} = x^{1/5}$, atd., se někdy definují pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak třeba $\sqrt[3]{-8} = -2$. My pro ně ale záporné x nepovolujeme.

Definice 4.3.11 (a^b algebraicky) *Definujeme funkce* x^m, $m \in \mathbb{Z}$. *Pro* $m > 0$ *se* $x^m = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ *s* m *činiteli a je v* $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. *Položíme* $x^0 = k_1$ $(\in \mathcal{F}(\mathbb{R}))$. *Pro* $m < 0$ *se* $x^m = 1/x^{-m} = k_1/x^{-m}$ *a je v* $\mathcal{F}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Zde tedy definujeme $0^0 = 1$ a mocnina a^b může být záporná.

Úloha 4.3.12 *Definice 4.3.10 a 4.3.11 mocniny* a^b *na svém průniku souhlasí.*

Úloha 4.3.13 *Dokažte, že pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *se* $\mathrm{e}^x = \exp x$. *Zde je vlevo reálná mocnina se základem* $\mathrm{e} = 2.71\ldots$ *a exponentem* x *a vpravo hodnota exponenciály.*

Tvrzení 4.3.14 (tři základní mocninné identity) *Pro reálná čísla* $a, b > 0$ & x, y *platí identity*

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad \& \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}\ .$$

Důkaz. $(ab)^x$ je $\exp(x \log(ab)) = \exp(x \log a + x \log b) = \exp(x \log a) \exp(x \log b) = a^x b^x$. Podobně $a^x a^y$ je $\exp(x \log a) \exp(y \log a) = \exp(x \log a + y \log a) = \exp((x+y) \log a) = a^{x+y}$. $(a^x)^y$ je $\exp(y \log(\exp(x \log a))) = \exp(yx \log a) = a^{xy}$. □

Ale $\big((-1)^2\big)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \ne -1 = (-1)^1 = (-1)^{2 \cdot \frac{1}{2}}$, kde jsme použili obě definice reálné mocniny. Polsko-americký matematik *Alfred Tarski (1901–1983)*, který byl druhým největším matematickým logikem 20. století, přišel s domněnkou, že každá mocninná identita, jako je třeba $x^y \cdot (x^y)^y = x^{y+y^2}$, se dá odvodit z předchozích tří základních identit (a dalších základních vlastností operací sčítání, násobení a umocňování). V r. 1981 jeho domněnku vyvrátil britský matematik *Alex Wilkie (1948)*, když dokázal, že mocninné identity jako

$$\begin{aligned}&\big((1+x)^y + (1+x+x^2)^y\big)^x \cdot \big((1+x^3)^x + (1+x^2+x^4)^x\big)^y \\ &= \big((1+x)^x + (1+x+x^2)^x\big)^y \cdot \big((1+x^3)^y + (1+x^2+x^4)^y\big)^x\end{aligned}$$

nelze odvodit ze tří základních mocninných identit. Takovým identitám nyní říkáme Wilkieho identity. Pro podrobnosti viz *MA 1*$^+$.

Úloha 4.3.15 *Dokažte, že pro reálná čísla* $x, y > 0$ *platí uvedená Wilkieho identita. Návod:* $(1+x) \cdot (1+x^2+x^4) = (1+x^3) \cdot (1+x+x^2)$.

Úloha 4.3.16 *Ukažte, že* 0^0 *je neurčitý výraz: pro každé nezáporné* $A \in \mathbb{R}^*$ *existují posloupnosti* $(a_n) \subset (0, +\infty)$ *a* $(b_n) \subset \mathbb{R}$*, že* $\lim a_n = \lim b_n = 0$ *a* $\lim (a_n)^{b_n} = A$*. Proč to neplatí se záporným* A*?*

Definovat 0^0 jako 1 se ale často hodí.

• <u>*Kosinus*</u> *a* <u>*sinus*</u>. Funkce $\cos, \sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pocházejí z geometrie, ale lze je definovat i součty řad. Pro každé $t \in \mathbb{R}$ se $\cos t$ rovná součtu $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ (zde $0^0 = 1$) a $\sin t$ součtu $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Tedy $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \cdots$ a $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \cdots$.

Úloha 4.3.17 *Pro každé* t *je* $\cos t$ *i* $\sin t$ *abskon řada, tedy i* AK *řada.*

Množina bodů v rovině $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ je <u>jednotková kružnice</u>, s poloměrem 1 a středem $(0, 0)$.

Věta 4.3.18 (o běžkyni) *Nechť* $t \in \mathbb{R}$*. Běžkyně vyběhne z bodu* $(1, 0)$ *kruhové dráhy* S *a běží po ní jednotkovou rychlostí, pro* $t > 0$ *proti a pro* $t \le 0$ *po směru hodinových ručiček.* <u>*Pak*</u> *v čase* $|t|$ *se běžkyně nachází v bodě* $(\cos t, \sin t)$ *(*$\in S$*).*

Přesné geometrické zavedení kosinu a sinu není jednoduchá věc, musí se začít definicí délky oblouku kružnice, viz *MA 1*$^+$. Tam tuto větu dokážeme.

<u>Číslo π</u> lze definovat dvěma způsoby. Jednak $\pi = 3.14159\ldots$ je dvojnásobek nejmenšího $x > 0$, že $\cos x = 0$. Dále 2π je obvod kružnice S: čas, kdy běžkyně opět proběhne startem. Druhá definice je neformální, protože délka kruhového oblouku bude definována až v *MA 1*$^+$. Tam také dokážeme ekvivalenci obou definic. Základní vlastnosti sinu a kosinu zde proto uvádíme jen podmíněně, předpokládáme větu 4.3.18.

Úloha 4.3.19 *Odvoďte z věty 4.3.18 následující tvrzení.*

Tvrzení 4.3.20 (sinus a kosinus) *Sinus a kosinus mají následující vlastnosti.*

1. *Jsou to* 2π*-periodické funkce:* $\cos(t + 2\pi) = \cos t$ *a* $\sin(t + 2\pi) = \sin t$.
2. *Na intervalu* $[0, \pi/2]$ *sinus roste z* 0 *do* 1.
3. $\forall\, t \in [0, \pi]\, \big(\sin(t) = \sin(\pi - t)\big)$ *a* $\forall\, t \in [0, 2\pi]\, \big(\sin(t) = -\sin(2\pi - t)\big)$.
4. *Pro každé* $t \in \mathbb{R}$ *se* $\cos t = \sin(t + \pi/2)$ *a* $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
5. *Platí součtové vzorce: pro každé* $s, t \in \mathbb{R}$ *se*

$$
\begin{aligned}
\sin(s \pm t) &= \sin s \cdot \cos t \pm \cos s \cdot \sin t \ \textit{a} \\
\cos(s \pm t) &= \cos s \cdot \cos t \mp \sin s \cdot \sin t\ .
\end{aligned}
$$

Úloha 4.3.21 (Eulerův vzorec) $\forall\, t\, \big(\exp(it) = \cos t + i \sin t\big)$, $i = \sqrt{-1}$.

• *Funkce tangens a kotangens* jsou definovány jako $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$ a $\cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$.

Úloha 4.3.22 $M(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{(2m-1)\pi}{2} :\ m \in \mathbb{Z}\}$, $M(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{m\pi :\ m \in \mathbb{Z}\}$.

Arkus sinus (inverzní sinus) a arkus kosinus (inverzní kosinus) je inverz restrikce sinu, resp. kosinu, na interval $[-\pi/2, \pi/2]$, resp. $[0, \pi]$. Jsou to bijekce

$$\arcsin\colon [-1,\, 1] \to [-\pi/2,\, \pi/2] \ \text{ a } \ \arccos\colon [-1,\, 1] \to [0,\, \pi]\ .$$

Funkce arkus tangens (inverzní tangens) a arkus kotangens (inverzní kotangens) je inverz restrikce funkce tangens, resp. kotangens, na interval $(-\pi/2, \pi/2)$, resp. $(0, \pi)$. Jsou to bijekce

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\pi/2,\, \pi/2) \ \text{ a } \ \mathrm{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\, \pi)\ .$$

4.4 Elementární funkce

• *Operace s funkcemi.* Začneme čtyřmi (binárními) operacemi na množině $\mathcal{R}$ (viz definice 4.2.6). Nechť $f, g \in \mathcal{R}$. Součet $f + g\colon M(f) \cap M(g) \to \mathbb{R}$ má hodnoty $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Součin $fg\colon M(f) \cap M(g) \to \mathbb{R}$ má hodnoty $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x)g(x)$. Podíl $f/g\colon M(f) \cap M(g) \setminus Z(g) \to \mathbb{R}$, kde $Z(g) = \{x \in M(g) :\ g(x) = 0\}$, má hodnoty $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$. Konečně, jak víme z první přednášky, složenina $f(g)\colon M(f(g)) \to \mathbb{R}$, kde je $M(f(g)) = \{x \in M(g) :\ g(x) \in M(f)\}$ ($\subset M(g)$), má hodnoty $(f(g))(x) = f(g(x))$. Na rozdíl od podílu dvou čísel je podíl dvou funkcí v $\mathcal{R}$ vždy definovaný!

Úloha 4.4.1 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 4.4.2 (monoidy funkcí) *Nechť $\mathcal{R}$ je jako v definici 4.2.6, $0_{\mathcal{R}} = k_0\colon \mathbb{R} \to \{0\}$ a $1_{\mathcal{R}} = k_1\colon \mathbb{R} \to \{1\}$. Algebraické struktury*

$$\mathcal{R}_{\mathrm{amo}} = (\mathcal{R},\, 0_{\mathcal{R}},\, +) \ \text{ a } \ \mathcal{R}_{\mathrm{mmo}} = (\mathcal{R},\, 1_{\mathcal{R}},\, \cdot)$$

jsou komutativní monoidy, takže výše definované operace $+$ a $\cdot$ jsou komutativní a asociativní a mají neutrální prvky $0_{\mathcal{R}}$ a $1_{\mathcal{R}}$. Nejsou to grupy, protože obecně neexistují inverzní prvky (nicméně viz úloha 4.4.8). Operace $\cdot$ je distributivní vzhledem k $+$, takže

$$f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)\ .$$

Nechť $f, g \in \mathcal{R}$. Rozdíl obou funkcí je funkce $f - g\colon M(f - g) \to \mathbb{R}$ s hodnotami $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, kde $M(f - g) = M(f) \cap M(g)$.

Úloha 4.4.3 *Dokažte, že pro každé dvě funkce $f, g \in \mathcal{R}$ se $f - g = f + (k_{-1} \cdot g)$.*

• *Elementární funkce.* Definujeme třídu Elementárních funkcí EF. Často je za ni vydávána předchozí třída ZEF.

Definice 4.4.4 (EF 1) *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je* <u>*elementární*</u> $\iff$ *v $\mathcal{R}$ existují takové funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, s $f_n = f$, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ je $f_i \in \mathrm{ZEF}$ nebo pro nějaké indexy $j, k \in \mathbb{N}$ s $1 \le j, k < i$ je $f_i = f_j + f_k$ nebo $f_i = f_j \cdot f_k$ nebo $f_i = f_j / f_k$ nebo $f_i = f_j(f_k)$.*

Přibližně řečeno, EF získáme ze ZEF opakovaným sčítáním, násobením, dělením a skládáním. Rozdíl dvou elementárních funkcí je elementární (úloha 4.4.3). <u>Identická funkce</u> $\mathrm{id}_\mathbb{R} = \mathrm{id}_\mathbb{R}(x) = x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je elementární, protože $\log(\exp) = \mathrm{id}_\mathbb{R}$. Místo $\mathrm{id}_\mathbb{R}$ často píšeme jen x. V opačném pořadí skládání se $\exp(\log) = \mathrm{id}_\mathbb{R} \,|\, (0, +\infty)$.

Úloha 4.4.5 *Ukažte, že absolutní hodnota $|x| \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ je elementární funkce.*

Úloha 4.4.6 *Čemu se rovná podíl konstantních funkcí k_1/k_0 ?*

Úloha 4.4.7 *Je prázdná funkce $\emptyset$ elementární?*

Úloha 4.4.8 *Pro každou $f \in \mathrm{EF}$ existuje jediná $g \in \mathrm{EF}$, že $M(g) = M(f)$ a $f + g = k_0 \,|\, M(f)$.*

Připomeňme si podle tvrzení 3.3.7 typy reálných intervalů:

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \mathbb{R}, (a,b), (-\infty,a), (a,+\infty), (a,b], [a,b), [a,b], (-\infty,a], [a,+\infty)\}\,,$$

pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$.

Tvrzení 4.4.9 (restrikce na intervaly) *Pro každou $f \in \mathrm{EF}$ a každý interval $I \in \mathcal{I}$ je $f \,|\, I \in \mathrm{EF}$.*

Důkaz. Stačí ukázat, že pro každý $I \in \mathcal{I}$ je $g = k_0 \,|\, I \in \mathrm{EF}$. Pak $f + g$ dává požadovanou elementární restrikci funkce f. Pro $I = \emptyset$ vezmeme $g = k_1/k_0$. Pro $I = \{a\}$ vezmeme $g = \sqrt{a-x} + \sqrt{x-a}$. Pro $I = (-\infty, b]$ vezmeme $g = \sqrt{b-x} - \sqrt{b-x}$. Pro $I = \mathbb{R}$ vezmeme $g = k_0$. Pro $I = (a,b)$ vezmeme $g = \log(x-a) + \log(b-x) - \log(x-a) - \log(b-x)$. Samozřejmě x je $\mathrm{id}_\mathbb{R}$, a je k_a a b je k_b. Pro další intervaly v $\mathcal{I}$ kombinujeme tyto odmocniny a logaritmy podobnými způsoby. □

Úloha 4.4.10 *Popište elementární funkce f a g s definičními obory $M(f) = \mathbb{Z}$ a $M(g) = \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{1/n:\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\})$.*

V ZEF je řada funkcí, které lze vyjádřit z ostatních a které tak jsou pro generování EF nadbytečné: $\cos x = \sin(x + \pi/2)$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} + \arcsin x$, $\arctan x = \arcsin\left(x/\sqrt{1+x^2}\right)$ a $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. Pro reálné mocniny máme následující redukci.

Úloha 4.4.11 *Ukažte, že z funkcí v definicích 4.3.10 a 4.3.11 si stačí ponechat funkce x^b s $b > 0$ a $b \notin \mathbb{N}$, které jsou v $\mathcal{F}([0, +\infty))$.*

Tyto redundantní funkce ze ZEF vyřadíme a dostaneme následující funkce.

Definice 4.4.12 (OZEF) *Opravdu základní elementární funkce jsou právě tyto funkce:* $k_c(x)$ *s* $c \in \mathbb{R}$*,* $\exp x$*,* $\log x$*,* x^b *(*$\in \mathcal{F}([0, +\infty))$*) s* $b > 0$ *a* $b \notin \mathbb{N}$*,* $\sin x$ *a* $\arcsin x$*.*

Nevyjádřitelnost funkcí x^b, $b \in (0, +\infty) \backslash \mathbb{N}$, z ostatních OZEF dokážeme v *MA 1*$^+$. Elementární funkce tedy můžeme definovat kompaktněji.

Definice 4.4.13 (EF 2) *V definici 4.4.4 lze třídu funkcí* ZEF *nahradit užší třídou* OZEF*.*

Například funkce $\sqrt{x} = x^{1/2}$, definovaná na $[0, +\infty)$, je OZEF a ZEF. Všimněte si, že $\exp(\frac{1}{2} \log x) \neq \sqrt{x}$, protože $M(\exp(\frac{1}{2} \log x)) = (0, +\infty)$. K elementárním funkcím se vrátíme v *MA 1*$^+$, kde také dokážeme neelementárnost některých antiderivací.

Elementární funkce $\frac{|x|}{x} \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{-1, 1\}$ má hodnotu -1 pro $x < 0$ a 1 pro $x > 0$. Podobá se funkci signum (znaménko) $\mathrm{sgn} \colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ dané jako $\mathrm{sgn}\, x = -1$ pro $x < 0$, $\mathrm{sgn}\, 0 = 0$ a $\mathrm{sgn}\, x = 1$ pro $x > 0$.

Tvrzení 4.4.14 (sgn není elementární) *Ovšem* $\mathrm{sgn} \notin$ EF*.*

Důkaz. Každá elementární funkce je spojitá, viz definice 6.1.1 a věta 6.6.14. Funkce znaménka ale není spojitá. □

Neměly by se tedy EF definovat šířeji, aby funkce znaménka byla elementární? Touto otázkou se budeme zabývat jinde. Otázkou existence spojitých neelementárních funkcí se zabýváme v *MA 1*$^+$.

Úloha 4.4.15 *Uveďte příklady funkcí v* EF*, které v některých bodech svého definičního oboru nemají vlastní derivaci.*

4.5 Polynomy a racionální funkce

Podobně jako v oddílu 3.5 i nyní se výrazně odchýlíme od standardního pojetí. Polynomy a racionální funkce zavedeme jako podmnožiny v $\mathcal{R}$ pomocí omezení na generování v definici 4.4.4.

- *Polynomy.* Předkládáme následující pojetí polynomů.

Definice 4.5.1 (POL) *Funkce* $f \in \mathcal{R}$ *je polynom* $\iff$ *v* $\mathcal{R}$ *existují takové funkce* $f_1, f_2, \dots, f_n$*,* $n \in \mathbb{N}$*, s* $f_n = f$*, že pro každé* $i = 1, 2, \dots, n$ *je* f_i *identita* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ *nebo konstanta* k_c*,* $c \in \mathbb{R}$*, nebo pro nějaké indexy* $j, k \in \mathbb{N}$ *s* $1 \leq j, k < i$ *je* $f_i = f_j + f_k$ *nebo* $f_i = f_j \cdot f_k$*. Množinu polynomů označíme jako* POL*.*

Patrně každá funkce f_i, $i \in [n]$, je polynom. Polynomy v našem pojetí tedy vzniknou z konstant a identity opakovaným sčítáním a násobením. Z tvaru polynomu $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, který je ve standardním pojetí definiční, je v našem pojetí tvar kanonický, jehož existenci a jednoznačnost teď dokážeme. Pro $f \in \mathcal{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ mocninu f^n definujeme pro $n = 0$ jako $f - f + k_1$ $(= k_1 \mid M(f))$ a pro $n > 0$ jako $f \cdot f \cdot \ldots \cdot f$ s n činiteli.

Tvrzení 4.5.2 (kanonický tvar polynomu) *Každý polynom p má $M(p) = \mathbb{R}$ a buď $p = k_0$ je tzv. nulový polynom, anebo p má jednoznačný kanonický tvar*

$$p = \textstyle\sum_{j=0}^{n} k_{a_j} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^{j} \quad (= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)\,,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$, $a_j \in \mathbb{R}$ & $a_n \neq 0$.

Důkaz. Z definice polynomu je jasné, že má definiční obor $\mathbb{R}$. Nechť p je polynom. Pak $p = f_n$ má generující posloupnost $f_1, \ldots, f_n$ podle definice 4.5.1. Užijeme indukci podle n. Když $n = 1$, pak p je buď nulový polynom, anebo má kanonický tvar $p = k_c \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^0$ s $c \neq 0$ či $p = k_0 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^0 + k_1 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}}^1$. Nechť $n > 1$. Pokud $p = f_n$ je konstanta nebo identita, jsme v předchozím případu. Nechť $p = f_j + f_k$ nebo $p = f_j \cdot f_k$ pro $1 \leq j, k < n$. Polynom f_j je buď nulový, anebo má podle indukce kanonický tvar. Totéž platí pro f_k. Pokud f_j nebo f_k je nulový, snadno vidíme, že p je též nulový nebo má kanonický tvar. Pokud f_j i f_k má kanonický tvar, s pomocí tvrzení 4.4.2 snadno vidíme, že p je nulový nebo má kanonický tvar.

Jednoznačnost kanonického tvaru plyne z následující úlohy (která vyplývá z existence kanonického tvaru). Nechť polynom p má dva různé kanonické tvary. S pomocí tvrzení 4.4.2 není těžké vidět, že pak rozdíl $p - p$ má také kanonický tvar. Podle úlohy 4.5.3 polynom $p - p$ má jen konečně mnoho nulových bodů. To je ale spor, protože $p - p = k_0$. □

Stupeň $\deg p$ nenulového polynomu p je index $n \in \mathbb{N}_0$ v jeho kanonickém tvaru. Stupeň nulového polynomu se někdy definuje jako $-\infty$.

Úloha 4.5.3 *Dokažte, že každý polynom p s kanonickým tvarem má konečnou množinu nulových bodů $Z(p) = \{b \in \mathbb{R} :\ p(b) = 0\}$.*

Obor integrity je okruh, v němž součin dvou nenulových prvků je vždy nenulový.

Úloha 4.5.4 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 4.5.5 (POL je OI) *Algebraická struktura $\mathbb{R}[x] = (\mathrm{POL}, k_0, k_1, +, \cdot)$ tvoří obor integrity.*

• *Racionální funkce.* Definujeme je podobně jako polynomy, jen navíc zapojíme operaci dělení. Uvidíme ale, že ve srovnání s polynomy se tím dostaneme do znatelně složitější situace.

Definice 4.5.6 (RAC) *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je* <u>*racionální*</u> $\iff$ *v $\mathcal{R}$ existují takové funkce $f_1, f_2, \dots, f_n$, $n \in \mathbb{N}$, s $f_n = f$, že pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ je f_i identita* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ *nebo konstanta k_c, $c \in \mathbb{R}$, nebo pro nějaké indexy $j, k \in \mathbb{N}$ s $1 \le j, k < i$ je $f_i = f_j + f_k$ nebo $f_i = f_j \cdot f_k$ nebo $f_i = f_j / f_k$. Množinu racionálních funkcí označíme jako* <u>RAC</u>.

Opět každá funkce f_i, $i \in [n]$, je racionální. V našem pojetí tedy racionální funkce vygenerujeme z konstant a identity opakovaným sčítáním, násobením a dělením. Například funkce $\frac{1}{x}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ je racionální. Každý polynom je racionální funkce, $\mathrm{POL} \subset \mathrm{RAC}$. Prázdná funkce $\emptyset$, která není polynom, je racionální, protože třeba $\emptyset = k_1/k_0$.

Tvrzení 4.5.7 (kanonické tvary v RAC) *Každá racionální funkce $r \neq \emptyset$ má $M(r) = \mathbb{R} \setminus Z$, kde $Z \subset \mathbb{R}$ je konečná množina, a existují pro ni dva polynomy p a q, že $q \neq k_0$, $Z = Z(q)$ a $r = p/q$.*

Důkaz. Nechť $r \in \mathrm{RAC}$. Pak $r = f_n$ má generující posloupnost $f_1, \dots, f_n$ podle definice 4.5.6. Opět indukce podle n. Když $n = 1$, pak r je konstanta nebo identita a r má kanonický tvar $\frac{c}{1}$, resp. $\frac{x}{1}$. Nechť $n > 1$. Když $r = f_n$ je konstanta nebo identita, jsme v předešlém případu. Nechť tedy pro nějaké $1 \le j, k < n$ je $r = f_j + f_k$ nebo $r = f_j \cdot f_k$ nebo $r = f_j/f_k$. Pak $f_j = \emptyset$ nebo f_j má podle indukce kanonický tvar. Totéž platí pro f_k. Je-li f_j nebo f_k prázdná, je i $r = \emptyset$. Nechť tedy máme kanonické tvary $f_j = p/q$, $f_k = p'/q'$, $M(f_j) = \mathbb{R} \setminus Z(q)$ a $M(f_k) = \mathbb{R} \setminus Z(q')$. Probereme tři uvedené případy pro r. V prvním případu se

$$r = f_j + f_k = \tfrac{pq' + p'q}{qq'} \,.$$

V čitateli i ve jmenovateli jsou polynomy a $qq' \neq k_0$, protože polynomy tvoří obor integrity. Dále $M(r) = M(f_j) \cap M(f_k) = \mathbb{R} \setminus (Z(q) \cup Z(q')) = \mathbb{R} \setminus Z(qq')$. Máme tedy kanonický tvar pro r. Ve druhém případu se

$$r = f_j f_k = \tfrac{pp'}{qq'} \,.$$

Jako v prvním případu vidíme, že to je kanonický tvar pro r. Konečně ve třetím případu se

$$r = f_j / f_k = \tfrac{p(q')^2}{qq'p'} \,.$$

V čitateli i ve jmenovateli jsou polynomy. Pokud $p' = k_0$, je $r = \emptyset$. Když $p' \neq k_0$, je $qq'p' \neq k_0$ a $M(r) = M(f_j) \cap M(f_k) \setminus Z(f_k)$ se rovná

$$(\mathbb{R} \setminus (Z(q) \cup Z(q'))) \setminus (Z(p') \setminus Z(q')) = \mathbb{R} \setminus (Z(q) \cup Z(q') \cup Z(p')) = \mathbb{R} \setminus Z(qq'p') \,.$$

Opět máme kanonický tvar pro r. $\square$

Kanonické tvary racionálních funkcí nejsou jednoznačné. Např. $\frac{0+1x}{0+1x}$ i $\frac{0+0x+1x^2}{0+0x+1x^2}$ je kanonický tvar racionální funkce x/x ($= k_1 \,|\, \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Na množině $\mathrm{RAC} \setminus \{\emptyset\}$ definujeme relaci <u>shodnosti $\sim$</u> jako

$$r \sim s \overset{\mathrm{def}}{\iff} r \,|\, M(s) = s \,|\, M(r) \,.$$

Úloha 4.5.8 *Dokažte, že $\sim$ je relace ekvivalence.*

Například $k_1 \sim x/x \sim (x \cdot (x-1))/(x \cdot (x-1))$.

Úloha 4.5.9 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 4.5.10 (těleso $\mathbb{R}(x)$) *Algebraická struktura*

$$\mathbb{R}(x) = ((\mathrm{RAC} \setminus \{\emptyset\})/\sim, [k_0]_\sim, [k_1]_\sim, +, \cdot)$$

je těleso, tzv. těleso racionálních funkcí.

Na rozdíl od algebry jsou prvky našeho tělesa $\mathbb{R}(x)$ opravdu funkce, přesněji jejich ekvivalenční bloky.

Úloha 4.5.11 *Proč jsme vyřadili prázdnou racionální funkci?*

Kapitola 5

Přednáška 5. Limity funkcí

Kapitolu inspirovanou pátou přednáškou

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred5.pdf`

přednesenou 21. 3. 2024 začneme oddílem 5.1 o jednostranných limitách funkcí. Tvrzení 5.1.7 a 5.1.13 popisují vztahy obyčejných a jednostranných limit. Potom v oddílu 5.2 zavedeme spojitost funkce v bodě. V tvrzení 5.2.4 ji charakterizujeme pomocí limit a v úloze 5.2.5 Heineho definicí.

Oddíl 5.3 obsahuje větu 5.3.1 o limitě monotónní funkce, větu 5.3.3 o aritmetice limit funkcí, větu 5.3.7 o limitě funkce a uspořádání a větu 5.3.11 o dvou funkčních strážnících. V oddílu 5.4 uvádíme větu 5.4.1 o limitě složené funkce. Na rozdíl od formulací této věty v literatuře, které jsou implikacemi, naše formulace je ekvivalence. V závěrečném oddílu 5.5 vysvětlíme význam asymptotických symbolů O, $\ll$, $\gg$, Ω, Θ, $\asymp$, o, ω a $\sim$.

5.1 Jednostranné limity

Všimněme si, že doplněk bodu $\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ se skládá ze dvou oddělených intervalů — na rozdíl od roviny $\mathbb{R}^2$ se v $\mathbb{R}$ bod a nedá „obejít“. Proto se zavádějí limity funkcí zleva a zprava. Začneme definicí jednostranných okolí.

• *Jednostranná okolí a jednostranné limitní body.* Levé, resp. pravé, ε-okolí bodu $b \in \mathbb{R}$ je

$$U^-(b,\, \varepsilon) = (b-\varepsilon,\, b], \text{ resp. } U^+(b,\, \varepsilon) = [b,\, b+\varepsilon)\,.$$

Levé, resp. pravé, prstencové ε-okolí bodu b je

$$P^-(b,\, \varepsilon) = (b-\varepsilon,\, b), \text{ resp. } P^+(b,\, \varepsilon) = (b,\, b+\varepsilon)\,.$$

Bod $b \in \mathbb{R}$ je levým, resp. pravým, limitním bodem množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud

$$\forall\, \varepsilon \left(P^-(b,\, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset\right), \text{ resp. } \forall\, \varepsilon \left(P^+(b,\, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset\right).$$

Množiny těchto bodů označíme jako $L^-(M)$, resp. $L^+(M)$ ($\subset \mathbb{R}$). Bod $b \in \mathbb{R}$ je oboustranný limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, krátce OLB, pokud

$$\forall\, \varepsilon \left(P^-(b,\, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset \,\wedge\, P^+(b,\, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset\right).$$

Množinu těchto bodů označíme jako $L^{\pm}(M)$ ($\subset \mathbb{R}$). OLB jsou klíčové v kritériu lokálního extrému založeném na anulování derivace. Pro nekonečna jednostranná okolí a jednostranné limitní body nedefinujeme.

Úloha 5.1.1 *$b \in L^-(M)$, resp. $b \in L^+(M)$ $\iff$ $\exists\, (a_n) \subset (-\infty, b) \cap M$, resp. $(a_n) \subset (b, +\infty) \cap M$, že $\lim a_n = b$.*

Úloha 5.1.2 *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$. Dokažte následující.*
1. *$b \in L^-(M) \Rightarrow b \in L(M)$,*
2. *$b \in L^+(M) \Rightarrow b \in L(M)$,*
3. *$b \in L(M) \Rightarrow b \in L^-(M)$ nebo $b \in L^+(M)$ a*
4. *je možné, že $b \in L(M)$, ale $b \notin L^-(M)$ nebo $b \notin L^+(M)$.*

Podle úlohy 4.2.3 žádná konečná reálná množina nemá limitní bod. Tím méně má nějaký jednostranný limitní bod. Podle úlohy 4.2.4 každá nekonečná reálná množina má limitní bod. Pro jednostranné limitní body to neplatí.

Úloha 5.1.3 *Uveďte příklad nekonečné podmnožiny $\mathbb{R}$, která nemá ani levý ani pravý limitní bod.*

Úloha 5.1.4 *Dokažte, že každá nekonečná a omezená reálná množina má levý limitní bod nebo pravý limitní bod.*

• *Jednostranné limity funkcí.* Limitu funkce zjemníme jednostrannými limitami.

Definice 5.1.5 (jednostranné limity) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in L^-(M)$ a L je v $\mathbb{R}^*$. Pokud pro každé ε existuje δ, že $f[P^-(b,\delta)] \subset U(L,\varepsilon)$, potom píšeme $\lim_{x\to b^-} f(x) = L$ a řekneme, že funkce f má v bodě b limitu zleva rovnou L. Náhrada znaménka $^-$ znaménkem $^+$ dává limitu v b zprava $\lim_{x\to b^+} f(x) = L$.*

Jako $\lim_{x\to A} f(x)$ pro $A \notin L(M(f))$ ani $\lim_{x\to b^-} f(x)$ pro $b \notin L^-(M(f))$ není definovaná. Totéž platí pro limitu zprava. Když $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existuje, jako dřív to implicitně znamená, že $b \in L^-(M(f))$. Totéž platí pro limitu zprava.

Úloha 5.1.6 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 5.1.7 (o jednostranných limitách) *Platí následující.*
1. $\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *nebo* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$,
2. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$ &
3. $\lim_{x\to a^-} f(x) = K$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ & $K \neq L \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)$ *neexistuje.*

Tedy $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ neexistuje, protože $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$ a $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$.

Úloha 5.1.8 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 5.1.9 (jednoznačnost $\lim_{x\to b^\pm} f(x)$) *Když platí, že $\lim_{x\to b^\pm} f(x) = K$ i že $\lim_{x\to b^\pm} f(x) = L$, pak $K = L$ (shodná znaménka).*

Úloha 5.1.10 *Dokažte následující tvrzení.*

Pro $b \in \mathbb{R}$ jako $I^-(b)$, resp. $I^+(b)$, označíme interval $(-\infty, b)$, resp. $(b, +\infty)$.

Tvrzení 5.1.11 (Heineho definice $\lim_{x\to b^\pm} f(x)$) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a b je v $L^\pm(M)$. Pak $\lim_{x\to b^\pm} f(x) = L \iff$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset M \cap I^\pm(b)$ s $\lim a_n = b$ se $\lim f(a_n) = L$ (shodná znaménka).*

Poznamenáme, že někdy se obyčejné limity funkcí píšou zbytečně složitě jako jednostranné. Například se píše $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$. Podle našich definic limit celou situaci vystihuje jednodušší $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$. Zde

$$\lim_{x\to 0} \log x = \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty\,,$$

ale limita $\lim_{x\to 0^-} \log x$ není definovaná, protože $0 \notin L^-(M(\log x))$. Závěrem ještě jeden vztah mezi obyčejnými a jednostrannými limitami, který použijeme v důkazu důsledku 5.4.5.

Úloha 5.1.12 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 5.1.13 (použití zúžení) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a $b \in L^\pm(M)$. Pak platí ekvivalence, že $\lim_{x\to b^\pm} f(x) = L \iff \lim_{x\to b}(f \mid I^\pm(b))(x) = L$ (shodná znaménka).*

5.2 Spojitost funkce v bodu

- *Spojitost funkce v bodu.* Následující definice je důležitá.

Definice 5.2.1 (spojitost funkce v bodu) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$. Funkce f je spojitá v bodu $b \in M$, když pro každé ε existuje δ, že $f[U(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$. Jinak řekneme, že f je v b nespojitá.*

Úloha 5.2.2 *Kdy je tedy funkce f v bodu $b \in M(f)$ nespojitá?*

Například $\operatorname{sgn} x$ je nespojitá v $x = 0$, ale všude jinde je spojitá. Když $b \notin M(f)$, funkce f není v b ani spojitá ani nespojitá. Při srovnání s limitou $\lim_{x\to b} f(x) = L$ vidíme, že L se nahradilo hodnotou $f(b)$ a prstencové okolí $P(b,\delta)$ obyčejným okolím $U(b,\delta)$.

Úloha 5.2.3 *Funkce f je spojitá v $b \in M(f)$, právě když pro každé ε existuje δ, že $x \in M(f) \wedge |x-b| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(b)| \le \varepsilon$.*

Spojitost f v b <u>není</u> ekvivalentní tomu, že $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$. To platí jen v limitních bodech množiny M.

Tvrzení 5.2.4 (o spojitosti v bodě) *Pro funkci $f \in \mathcal{F}(M)$ & bod $b \in M \cap L(M)$ jsou* 1, 2 *a* 3 *vzájemně ekvivalentní.* 1. *Funkce f je v b spojitá.* 2. *Limita* $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$. 3. *Pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ se* $\lim f(a_n) = f(b)$.

Důkaz. Implikace $1 \Rightarrow 2$. Nechť f je spojitá v b podle definice 5.2.1 a je dáno ε. Tedy existuje δ, že $f[U(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$. Pak $b \in L(M(f))$ a i $f[P(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$ a $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$.

Implikace $2 \Rightarrow 3$. Nechť $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$, $(a_n) \subset M$ má limitu $\lim a_n = b$ a je dáno ε. Tedy existuje δ, že

$$f[P(b,\,\delta)] \subset U(f(b),\,\varepsilon)\;. \tag{$*$}$$

Vezmeme n_0, že $n \ge n_0 \Rightarrow a_n \in U(b,\delta)$. Pak též $n \ge n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(f(b),\varepsilon)$: pro $a_n \ne b$ použijeme inkluzi $(*)$ a pro $a_n = b$ je $f(a_n) = f(b) \in U(f(b),\varepsilon)$. Tedy $\lim f(a_n) = f(b)$.

Implikace $3 \Rightarrow 1$, to jest $\neg 1 \Rightarrow \neg 3$. Nechť f není spojitá v b. Pak existuje takové ε, že pro $\forall\,\delta\,\exists\,a = a(\delta) \in U(b,\delta) \cap M$, že $f(a) \notin U(f(b),\varepsilon)$. Pro každé n *vybereme* nějaké takové $a_n = a(1/n)$ a dostaneme posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = b$, ale $f(a_n) \notin U(f(b),\varepsilon)$ pro každé n. Tedy $(f(a_n))$ nemá limitu $f(b)$ a část 3 neplatí. □

Poslední implikaci jsme opět dokázali s pomocí *axiomu výběru*. Část 3 popisuje <u>Heineho definici spojitosti funkce v bodu</u>. Následující úloha ji upřesňuje.

Úloha 5.2.5 *V tvrzení 5.2.4 v ekvivalenci* (1) $\iff$ (3) *je možné předpoklad $b \in L(M)$ vynechat. Takže funkce f je spojitá v bodu $b \in M(f)$ $\iff$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ se $\lim f(a_n) = f(b)$.*

Pravá strana této ekvivalence se někdy bere jako definice spojitosti funkce v bodu.

• *Izolované body.* Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Množina $M \setminus L(M)$ je tvořena takzvanými <u>izolovanými body</u> množiny M.

Úloha 5.2.6 *Bod $b \in M$ je izolovaný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, právě když pro nějaké ε je $U(b,\varepsilon) \cap M = \{b\}$.*

Úloha 5.2.7 *Nechť $b \in M \subset \mathbb{R}$. Pak b je buď limitní bod množiny M, anebo izolovaný bod množiny M.*

Tvrzení 5.2.8 (spojitost v izolovaném bodu) *Každá funkce $f \in \mathcal{R}$ je spojitá v každém izolovaném bodu množiny $M(f)$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a $b \in M$ je izolovaný bod. Podle úlohy 5.2.6 existuje δ, že $U(b,\delta) \cap M = \{b\}$. Pro toto δ inkluze $f[U(b,\delta)] = f[\{b\}] = \{f(b)\} \subset U(f(b),\varepsilon)$ platí pro každé ε. Takže f je spojitá v b podle definice 5.2.1. $\Box$

Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$, tedy funkce $a \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, je tak spojitá v každém bodu n svého definičního oboru $\mathbb{N}$.

Úloha 5.2.9 *Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ není spojitá v $b \in M$ $\iff$ $\exists$ posloupnost $(a_n) \subset M$, že $\lim a_n = b$ a $\lim f(a_n) = A \neq f(b)$.*

• *Jednostranná spojitost.* Funkce f je zleva spojitá v bodě $b \in M(f)$, když pro každé ε existuje δ, že $f[U^-(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$ Náhradou znaménka $^-$ znaménkem $^+$ dostaneme spojitost zprava.

Úloha 5.2.10 *Funkce je v daném bodu spojitá $\iff$ je v něm zleva i zprava spojitá.*

• *Riemannova funkce.* Je to funkce $r \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ s hodnotami $r(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ a $r(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}$ pro zlomek $\frac{m}{n}$ v základním tvaru.

Tvrzení 5.2.11 (o Riemannově funkci) *Tato funkce je spojitá právě v iracionálních číslech.*

Důkaz. Nechť $x = \frac{m}{n}$ je zlomek v základním tvaru a $\varepsilon \le \frac{1}{n}$. Pro $\forall\,\delta\,\exists$ iracionální $\alpha \in U(x,\delta)$. Ale $r(\alpha) = 0 \notin U(r(x),\varepsilon) = U(\frac{1}{n},\varepsilon)$, takže funkce r není spojitá v bodě x. Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a je dáno $\varepsilon \in (0,1)$. Definujeme

$$M = \{|x - \tfrac{m}{n}| :\ \tfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cap U(x,\,1) \wedge \tfrac{1}{n} \ge \varepsilon\} \ \text{ a } \ \delta = \min(M)\ .$$

Toto δ existuje a $\delta > 0$, protože podle úlohy 5.2.12 je M neprázdná konečná množina kladných čísel. Pro toto δ je $y \in U(x,\delta) \Rightarrow r(y) \in U(r(x),\varepsilon) = U(0,\varepsilon)$ — pro každé $y \in U(x,\delta)$ je $r(y) = 0$ nebo $r(y) = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Proto je funkce r spojitá v bodu x. $\Box$

Úloha 5.2.12 *Proč je M neprázdná konečná množina kladných čísel?*

5.3 Limity a uspořádání, aritmetika limit

Některé výsledky o existenci limit posloupností, o jejich aritmetice a o jejich vztahu k uspořádání teď rozšíříme na limity funkcí.

• *Limity monotónních funkcí.* Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a X je libovolná množina. Funkce f neklesá, resp. neroste, na X, pokud pro každé $x \le y$ v $X \cap M$ je $f(x) \le f(y)$, resp. $f(x) \ge f(y)$. Když f na X neklesá či neroste, je na X monotónní. Ano, X nemusí být podmnožinou M.

Věta 5.3.1 (limita monotónní funkce) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$. Platí následující.*
1. *Když $b \in L^-(M)$ a existuje θ, že f na $P^-(b, \theta)$ neklesá, <u>pak</u>*

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup(f[P^-(b,\,\theta)])\,.$$

2. *Když $+\infty \in L(M)$ a existuje θ, že f na $U(+\infty, \theta)$ neklesá, <u>pak</u>*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup(f[U(+\infty,\,\theta)])\,.$$

Suprema zde bereme v LU $(\mathbb{R}^*, <)$.

Důkaz. 1. Nechť f, M, b a θ jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Označíme si $A = \sup(f[P^-(b, \theta)])$ a vezmeme libovolné $a \in U(A, \varepsilon)$ s $a < A$. Podle definice suprema existuje $c \in P^-(b, \theta) \cap M$, že $a < f(c) \le A$. Položíme $\delta = b - c$. Pro každé $d \in M$ s $c < d < b$ je $a < f(c) \le f(d) \le A$, tedy (podle úlohy 2.1.12) $f(d) \in U(A, \varepsilon)$. Takže $f[P^-(b, \delta)] \subset U(A, \varepsilon)$ a $\lim_{x \to b^-} f(x) = A$.

2. Nechť f, M a θ jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. $A := \sup(f[U(+\infty, \theta)])$ a vezmeme libovolné $a \in U(A, \varepsilon)$ s $a < A$. Podle definice suprema existuje $c \in U(+\infty, \theta) \cap M$, že $a < f(c) \le A$. Položíme $\delta = 1/c$. Pro každé $d \in M$ s $c < d$ je $a < f(c) \le f(d) \le A$, tedy (podle úlohy 2.1.12) $f(d) \in U(A, \varepsilon)$. Takže $f[U(+\infty, \delta)] \subset U(A, \varepsilon)$ a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$. □

Pro obyčejné limity věta neplatí: funkce $\mathrm{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ na $\mathbb{R}$ neklesá, ale $\lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}\, x$ neexistuje. Nalezení obyčejné limity monotónní funkce převedeme pomocí tvrzení 5.1.7 na nalezení jejích jednostranných limit. Ty nalezneme pomocí předešlé věty a následující úlohy.

Úloha 5.3.2 *Popište další varianty věty: pro lokálně nerostoucí funkci a/nebo limitu v b zprava, popř. v $-\infty$.*

• *Aritmetika limit funkcí.* Aritmetiku limit (AL) rozšíříme z posloupností na funkce. V důkazu využijeme Heineho definici limity funkce.

Věta 5.3.3 (aritmetika limit funkcí) *Buď $f, g \in \mathcal{R}$, $A \in L(M(f) \cap M(g))$, $\lim_{x \to A} f(x) = K$ a $\lim_{x \to A} g(x) = L$. <u>Pak</u> se $\lim_{x \to A}(f + g)(x) = K + L$, $\lim_{x \to A}(fg)(x) = KL$ a $\lim_{x \to A}(f/g)(x) = K/L$, pokud výraz napravo není neurčitý.*

Důkaz. Probereme jen podíl, důkazy pro součet a součin jsou podobné a jednodušší. Nechť výraz K/L není neurčitý. Pak $L \ne 0$ a tedy $A \in L(M(f/g))$ (úloha 5.3.4). Nechť $(a_n) \subset M(f/g) \setminus \{A\}$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = A$. Podle implikace $\Rightarrow$ v Heineho definici limity funkce se $\lim f(a_n) = K$ a $\lim g(a_n) = L$. Díky větě 3.1.2 dostáváme, že $\lim \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \frac{K}{L}$. Protože pro každou posloupnost (a_n) jako výše má posloupnost $\left(\frac{f(a_n)}{g(a_n)}\right) = ((f/g)(a_n))$ tuto limitu, implikace $\Leftarrow$ v Heineho definici limity funkce dává, že i limita $\lim_{x \to A}(f/g)(x) = K/L$. □

Úloha 5.3.4 *Proč pro $L \neq 0$ je A limitním bodem množiny $M(f/g)$?*

Variantu předchozí věty s jednostrannými limitami snadno dostane pomocí tvrzení 5.1.13.

Úloha 5.3.5 *Z věty odvoďte následující důsledek.*

Důsledek 5.3.6 (limita 1/g 1) *Když $g \in \mathcal{R}$ a $\lim_{x\to A} g(x) = B \neq 0$, pak $\lim_{x\to A} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$.*

• *Limity funkcí a* LU $(\mathbb{R}^*, <)$. Připomínáme, že pro množiny $M, N \subset \mathbb{R}$ porovnání $M < N$ znamená, že $a \in M, b \in N \Rightarrow a < b$. Také víme, že pro každou funkci f a libovolnou množinu X se

$$f[X] = f[X \cap M(f)] = \{f(x) : \ x \in X \cap M(f)\} .$$

Věta 5.3.7 (limita funkce a uspořádání 1) *Mějme limity $\lim_{x\to A} f(x) = K$ a $\lim_{x\to B} g(x) = L$ (je možné, že $A \neq B$). Pak platí následující.*
1. Když $K < L$, pak existuje δ, že $f[P(A,\delta)] < g[P(B,\delta)]$.
2. Když pro každé $\delta > 0$ existuje $x \in P(A,\delta) \cap M(f)$ a $y \in P(B,\delta) \cap M(g)$, že $f(x) \geq g(y)$, pak $K \geq L$.

Důkaz. 1. Protože $K < L$, podle úlohy 2.1.13 existuje ε, že $U(K,\varepsilon) < U(L,\varepsilon)$. Pak podle předpokladu existuje δ, že $f[P(A,\delta)] \subset U(K,\varepsilon)$ a $g[P(B,\delta)] \subset U(L,\varepsilon)$. Tedy $f[P(A,\delta)] < g[P(B,\delta)]$.

2. Část 2 je jen obměna implikace v části 1. □

Větu lze zesílit podobně jako tvrzení 3.3.6 zesiluje větu 3.3.2.

Úloha 5.3.8 *Dokažte následující tvrzení.*

Tvrzení 5.3.9 (limita funkce a uspořádání 2) *Nechť jsou dány dvě limity $\lim_{x\to A} f(x) = K$ a $\lim_{x\to B} g(x) = L$ ($A \neq B$ lze). Pak platí následující.*
1. Když $K < L$, pak existuje δ a dvě čísla a, b, že $f[P(A,\delta)] < \{a\} < \{b\} < g[P(B,\delta)]$.
2. Když pro každé δ a každá dvě čísla $a < b$ existuje $x \in P(A,\delta) \cap M(f)$ a $y \in P(B,\delta) \cap M(g)$, že $f(x) \geq a$ nebo $g(y) \leq b$, pak $K \geq L$.

Úloha 5.3.10 *Zformulujte verze věty 5.3.7 a tvrzení 5.3.9 pro jednostranné limity a dokažte je.*

Víme, že symbol $I(a,b)$ označuje uzavřený reálný interval s konci a a b.

Věta 5.3.11 (dva funkční strážníci) *Nechť je $f, g, h \in \mathcal{F}(M)$, platí limity $\lim_{x\to K} f(x) = \lim_{x\to K} g(x) = L$ a existuje θ, že pro každé $x \in P(K,\theta) \cap M$ je $h(x) \in I\big(f(x), g(x)\big)$. Potom $\lim_{x\to K} h(x) = L$.*

Důkaz. Nechť f, g, h, M, K, L a θ jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Vezmeme $\delta \le \theta$, že pro každé $x \in P(K,\delta) \cap M$ hodnoty $f(x)$ a $g(x)$ leží v $U(L,\varepsilon)$. Pro tato x je $h(x) \in I\big(f(x), g(x)\big) \subset U(L,\varepsilon)$, protože $U(L,\varepsilon)$ je konvexní množina. Tedy $h[P(K,\delta)] \subset U(L,\varepsilon)$ a $\lim_{x\to K} h(x) = L$. □

5.4 Limita složené funkce

• *Věta o limitě složené funkce.* Operace skládání funkcí nemá u posloupností obdobu. Následující věta o limitě složené funkce je proto novinkou. Její formulace v literatuře jsou implikace. Naše formulace je ekvivalence.

Věta 5.4.1 (limita složené funkce) *Buď* $\lim_{x\to A} g(x) = K$, $\lim_{x\to K} f(x) = L$ *a* $A \in L(M(f(g)))$. *<u>Pak</u>* $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L \iff$ *je splněna alespoň jedna ze dvou následujících podmínek.*
1. *Platí implikace, že* $K \in M(f) \Rightarrow f(K) = L$.
2. *Existuje* θ, *že* $K \notin g[P(A,\theta)]$.
Když ani jedna podmínka není splněna, pak limita $\lim_{x\to A} f(g)(x)$ *buď neexistuje, anebo se rovná* $f(K)$, *ale to není* L.

Důkaz. Nechť A, g, K, f a L jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Podle předpokladů existuje δ', že (a) $f[P(K,\delta')] \subset U(L,\varepsilon)$, a existuje δ, že (b) $g[P(A,\delta)] \subset U(K,\delta')$. Nechť platí podmínka 1. Inkluze (a) pak zesílí na inkluzi $f[U(K,\delta')] \subset U(L,\varepsilon)$ a

$$f(g)[P(A,\,\delta)] = f[\,g[P(A,\,\delta)]\,] \subset f[U(K,\,\delta')] \subset U(L,\,\varepsilon)\,,$$

takže $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$.

Nechť platí podmínka 2. Předešlé δ můžeme vzít tak, že navíc $\delta \le \theta$, kde θ je z podmínky 2. Inkluze (b) pak zesílí na inkluzi $g[P(A,\delta)] \subset P(K,\delta')$ a

$$f(g)[P(A,\,\delta)] = f[\,g[P(A,\,\delta)]\,] \subset f[P(K,\,\delta')] \subset U(L,\,\varepsilon)\,,$$

takže opět $\lim_{x\to A} f(g(x)) = L$.

Nechť ani podmínka 1 ani podmínka 2 neplatí. Neplatnost podmínky 1 znamená, že $K \in M(f)$, ale $f(K) \ne L$. Neplatnost podmínky 2 znamená, že pro každé n existuje $a_n \in P(A,1/n) \cap M(g)$, že $g(a_n) = K$. Pak $(a_n) \subset M(f(g)) \setminus \{A\}$, $\lim a_n = A$ a

$$\lim\, f(g)(a_n) = \lim\, f(g(a_n)) = \lim\, f(K) = f(K)\ \ (\ne L)\,.$$

Podle Heineho definice limity funkce tedy $\lim_{x\to A} f(g(x))$ buď neexistuje, anebo se rovná $f(K)$, což však není L. □

Podmínka 1 je splněna vždy, když $K \notin M(f)$, např. pro $K = \pm\infty$. Podobně podmínka 2 je splněna vždy, když funkce g je prostá. Pak lze větu vždy použít a dostáváme tento důsledek.

Důsledek 5.4.2 (kdy věta funguje) *Buď* $\lim_{x\to A} g(x) = K$, $\lim_{x\to K} f(x) = L$ *a* $A \in L(M(f(g)))$. *Předpokládejme, že* $K = \pm\infty$ *nebo že* g *je injekce.* *Pak* $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$.

Úloha 5.4.3 *Dokažte tuto větu pomocí Heineho definice limity funkce.*

• *Použití věty 5.4.1.* Uvedeme několik použití věty o limitě složené funkce či přesněji jejího důsledku 5.4.2. Dvě ekvivalence limit funkcí níže se často používají.

Důsledek 5.4.4 (posun argumentu do nuly) *Nechť* $f \in \mathcal{F}(M)$ *a* $b \in \mathbb{R}$. *Pak* $\lim_{x\to b} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0} f(x+b)(x) = L$.

Důkaz. Nechť f a b jsou, jak uvedeno. Implikace $\Rightarrow$: nechť $\lim_{x\to b} f(x) = L$. Tedy $b \in L(M)$. Vezmeme vnější funkci f, prostou vnitřní funkci $g(x) = x + b$, $A = 0$ a $K = b$. Je $M(f(g)) = X := \{x - b:\ x \in M\}$ a $0 \in L(X)$. Dále $\lim_{x\to 0} g(x) = b$ a $\lim_{x\to b} f(x) = L$. Důsledek 5.4.2 dává, že $\lim_{x\to 0} f(x+b)(x) = \lim_{x\to 0} f(g)(x) = L$.

Implikace $\Leftarrow$: nechť $\lim_{x\to 0} f(x+b)(x) = L$. Tedy $0 \in L(X)$. Vezmeme vnější funkci $g(x) = f(x+b)$, prostou vnitřní funkci $h(x) = x - b$, $A = b$ a $K = 0$. Je $M(g(h)) = M(f) = M$ a $b \in L(M)$. Patrně $\lim_{x\to b} h(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g(x) = L$ a $g(h) = f((x-b)+b) = f$. Z důsledku 5.4.2 dostáváme, že $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(h)(x) = L$. □

Důsledek 5.4.5 ($\to 0^{\pm} \iff \to \pm\infty$) *Nechť* $f \in \mathcal{R}$. *Pak* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0^{\pm}} f(1/x)(x) = L$ *(shodná znaménka).*

Důkaz. Omezíme se na znaménko $+$, případ s $-$ je podobný. Implikace $\Rightarrow$: nechť $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, takže $+\infty \in L(M(f))$. Vezmeme vnější funkci f, prostou vnitřní funkci $g = \frac{1}{x} \,|\, (0, +\infty)$, $A = 0$ a $K = +\infty$. Patrně $0 \in L(M(f(g)))$ a $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$. Podle důsledku 5.4.2 máme, že $L = \lim_{x\to 0} f(g)(x) = \lim_{x\to 0^+} f(1/x)(x)$.

Implikace $\Leftarrow$: nechť $\lim_{x\to 0^+} f(1/x)(x) = L$. Pro g jako výše vezmeme vnější funkci $F = f(g)$, prostou vnitřní funkci g, $A = +\infty$ a $K = 0$. Pak $A \in L(M(F(g)))$ a $\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0^+} f(1/x)(x) = L$. Patrně $g(g) = x \,|\, (0, +\infty)$. Důsledek 5.4.2 nám dává $L = \lim_{x\to+\infty} F(g)(x)$, což se rovná limitě $\lim_{x\to+\infty} f(g(g))(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ (úloha 1.3.12). □

Výpočetní obraty, že $\lim_{x\to b} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0} f(x+b)(x) = L$ a že $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \iff \lim_{x\to 0^{\pm}} f(1/x)(x) = L$ používáme ve výpočetní praxi bez přemýšlení. Výše je jejich přesná podoba a formální zdůvodnění.

Úloha 5.4.6 *Pomocí věty 5.4.1 dokažte důsledek 5.3.6. Pro pohodlí čtenáře ho tu zopakujeme.*

Důsledek 5.4.7 (limita 1/g 2) *Když* $g \in \mathcal{R}$ *a* $\lim_{x\to A} g(x) = B \neq 0$, *pak* $\lim_{x\to A} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$.

5.5 Asymptotické značení

Kuriózním průnikem knih o výpočetní složitosti a algoritmech s učebnicemi analýzy je značení pro asymptotické chování funkcí, viz například úlohu 5.5.2. Informaticky vzdělaný čtenář se s ním už jistě setkal. Pojďme se podívat, jak se asymptotické symboly definují v analýze, respektive v této učebnici.

• *Asymptotické symboly O, $\ll$ a další.* Tyto nemají limitní povahu.

Definice 5.5.1 (O a $\ll$) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}$ a $N \subset M(f) \cap M(g)$. Potom píšeme $\underline{f(x) = O(g(x))\ (\text{na } N)}$ a řekneme, že na množině N je funkce f velké O z funkce g, když existuje $c > 0$, že pro každé $x \in N$ je $|f(x)| \le c \cdot |g(x)|$. Značení $\underline{f(x) \ll g(x)\ (\text{na } N)}$ znamená totéž.*

Například $20x^2 + 100x - 1 = O(x^2)$ (na $[1, +\infty)$). Lze se setkat se značením $f = g + O(h)$ (na N). Znamená, že $f - g = O(h)$ (na N). Značení jako $\log x = O_\varepsilon(x^\varepsilon)$ (na $[1, +\infty)$) znamená, že implicitní konstanta $c > 0$ je funkcí parametru ε. Značení $f \gg g$ (na N) a $f = \Omega(g)$ (na N) znamenají, že $g \ll f$ (na N). Značení $f = \Theta(g)$ (na N) a $f \asymp g$ (na N) znamenají, že $f \ll g$ i $g \ll f$ (na N).

Úloha 5.5.2 *V [8, str. 19] je tato definice O: „In particular, for $f, g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g = O(f)$ means that $g(n) \le cf(n) + c$ for some constant $c \ge 1$ and all n“. Objasněte vztah tohoto O k našemu O.*

Úloha 5.5.3 *Zde je pár otázek na asymptotický vztah O.*
1. *Je $x^2 = O(x^3)$ (na $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$)?*
2. *Je $x^2 = O(x^3)$ (na $\mathbb{R}$)?*
3. *Je $x^3 = O(x^2)$ (na $\mathbb{R}$)?*
4. *Je $x^3 = O(x^2)$ (na $(-20, 20)$)?*
5. *Je $\log x = O(x^{1/3})$ (na $(0, +\infty)$)?*
6. *Je $\log x = O(x^{1/3})$ (na $(1, +\infty)$)?*

• *Asymptotické symboly o, ω a $\sim$.* Ty už definujeme pomocí limit.

Definice 5.5.4 (o, ω a $\sim$) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}$ a $A \in L(M(f/g))$. Potom píšeme $\underline{f(x) = o(g(x))\ (x \to A)}$ a řekneme, že pro $x \to A$ je funkce f malé o z funkce g, jestliže $\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Značení $\underline{f(x) = \omega(g(x))\ (x \to A)}$ znamená totéž. Píšeme $\underline{f(x) \sim g(x)\ (x \to A)}$ a řekneme, že pro $x \to A$ je funkce f asymptoticky rovna funkci g, jestliže $\lim_{x\to A} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Značení $f = g + o(h)$ $(x \to A)$, znamená, že $f - g = o(h)$ $(x \to A)$.

Úloha 5.5.5 *Zde je pár otázek na asymptotické vztahy o a $\sim$.*
1. *Je $x^2 = o(x^3)$ $(x \to +\infty)$?*
2. *Je $x^3 = o(x^2)$ $(x \to 0)$?*
3. *Je $x^2 = o(x^3)$ $(x \to 0)$?*

4. *Je* $(x+1)^3 \sim x^3$ *(*$x \to 1$*)?*
5. *Je* $(x+1)^3 \sim x^3$ *(*$x \to +\infty$*)?*
6. *Je* $\mathrm{e}^{-1/x^2} = o(x^{20})$ *(*$x \to 0$*)?*

Symboly o, O a $\sim$ zavedli P. Bachman a E. Landau. Symboly $\ll, \gg$ a $\asymp$ pocházejí od I. M. Vinogradova. O těchto matematicích píšeme v *MA 1*$^+$.

• *Slavné asymptotiky.* Pro $x \in \mathbb{R}$ nechť $\pi(x)$ je počet prvočísel nepřesahujících x. V r. 1896 francouzský matematik *Jacques Hadamard (1865–1963)* a, nezávisle na něm, belgický matematik *Charles Jean de la Vallée Poussin (1866–1962)* dokázali známou Prvočíselnou větu, že

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to +\infty)\,.$$

Pro $k, n \in \mathbb{N}$ nechť $r_k(n)$ je velikost největší množiny $X \subset [n]$, která neobsahuje aritmetickou posloupnost délky k. V r. 1975 E. Szemerédi dokázal známou větu, o níž jsme se už zmínili v závěru druhé přednášky, že pro každé k je

$$r_k(n) = o(n) \quad (n \to +\infty)\,.$$

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme $D(x) = |\{(m,\, n) \in \mathbb{N}^2 :\ mn \le x\}|$.

Úloha 5.5.6 *Ukažte, že* $D(x) = \sum_{n \le x} \tau(n)$*, kde* $\tau(n)$ *je počet dělitelů čísla* n *(např.* $\tau(28) = |\{1, 2, 4, 7, 14, 28\}| = 6$*).*

Úloze odhadnout $D(x)$ se říká (Dirichletův) problém dělitelů. V r. 1849 německý matematik *Peter L. Dirichlet (1805–1859)* dokázal, že

$$D(x) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}) \qquad (x \ge 2)\,,$$

kde γ je Eulerova konstanta. V r. 1903 to rusko-ukrajinský matematik *Georgij F. Voronoj (1868–1908)* zlepšil na

$$D(x) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O\big(x^{1/3}\log x\big) \qquad (x \ge 2)\,.$$

Ve 20. století přišla řada dalších zlepšení odhadu chyby v problému dělitelů. Současný rekord drží britský matematik *Martin N. Huxley (1944)*, který v r. 2003 dokázal, že pro každé ε je

$$D(x) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O_\varepsilon\big(x^{131/416+\varepsilon}\big) \qquad (x \ge 2)\,.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ a nějaký algoritmus (Turingův stroj) T pro násobení celých čísel definujeme $T(n)$ jako nejmenší $k \in \mathbb{N}$, že T vynásobí dvě n-ciferná čísla v nejvýše k krocích. Školský algoritmus $T_š$ má rychlost $T_š(n) = O(n^2)$ $(n \in \mathbb{N})$. V r. 1960 ruský matematik *Anatolij A. Karacuba (1937–2008)* vymyslel algoritmus T_K, který násobí s rychlostí $T_K(n) = O\big(n^{\log_2 3}\big) = O\big(n^{1.585\ldots}\big)$ $(n \in \mathbb{N})$. V r. 2021 australský informatik *David Harvey* a holandský informatik *Joris van der Hoeven (1971)* nalezli algoritmus T_{HH} pro násobení celých čísel s rychlostí

$$T_{HH}(n) = O(n\log n) \quad (n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})\,.$$

Úloha 5.5.7 *Proč tu nepíšeme* $n \in \mathbb{N}$*?*

Kapitola 6

Přednáška 6. Spojité funkce

Budeme se zabývat spojitými funkcemi. Šestou přednášku

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred6.pdf`

jsem přednesl 28. 3. 2024. V oddílu 6.1 zavedeme husté a řídké množiny a uvedeme Blumbergovu větu 6.1.11, podle níž každá všude definovaná reálná funkce má spojité zúžení na nějakou hustou podmnožinu. Větu dokážeme v *MA 1*$^+$. V oddílu 6.2 ve větě 6.2.3 dokážeme, že množina všude definovaných spojitých reálných funkcí je v bijekci s množinou $\mathbb{R}$. Hlavním výsledkem oddílu 6.3 je věta 6.3.1 o nabývání mezihodnot spojitými funkcemi.

V oddílu 6.4 definujeme kompaktní množiny a ve větě 6.4.1 dokážeme, že spojitá funkce s kompaktním definičním oborem má minimum i maximum. Definujeme otevřené a uzavřené množiny reálných čísel, uvedeme jejich základní vlastnosti a ve větě 6.4.10 kompaktní množiny charakterizujeme. Podle tvrzení 6.5.2 je spojitá funkce na kompaktní množině stejnoměrně spojitá. Podle tvrzení 6.5.4 má stejnoměrně spojitá funkce spojité rozšíření do každého vlastního limitního bodu definičního oboru. Oddíl 6.6 se zabývá zachováváním spojitosti při operacích s funkcemi, například věta 6.6.1 se týká aritmetických operací a věta 6.6.3 funkcí definovaných součtem mocninné řady. Věta 6.6.8 je věnována složeným funkcím a věta 6.6.9 inverzním funkcím. Věta 6.6.14 dokazuje spojitost elementárních funkcí.

6.1 Blumbergova věta

• *Spojité funkce.* Podle definice 5.2.1 funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ je spojitá v bodu $a \in M$, pokud pro každé ε existuje δ, že $f[U(a,\delta)] \subset U(f(a),\varepsilon)$. Několikrát použijeme ekvivalenci, že

$$f \text{ je spojitá v } a \iff \forall\,(a_n) \subset M\,\big(\lim a_n = a \Rightarrow \lim f(a_n) = f(a)\big)\,. \qquad \text{(H)}$$

Tato Heineho definice spojitosti funkce v bodě byla dokázána v úloze 5.2.5.

Definice 6.1.1 (spojité funkce) *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je spojitá (na $M(f)$), je-li spojitá v každém bodu $b \in M(f)$. Množinu spojitých funkcí $f \in \mathcal{F}(M)$ označíme jako $\mathcal{C}(M)$. Položíme $\mathcal{C} \equiv \bigcup_{M \subset \mathbb{R}} \mathcal{C}(M)$.*

Úloha 6.1.2 *Každá funkce v $\mathcal{R}$ s konečným definičním oborem je spojitá.*

Úloha 6.1.3 *Každá konstantní funkce $k_a \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, je spojitá.*

Úloha 6.1.4 *Identická funkce $x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ je spojitá.*

Tvrzení 6.1.5 (spojitost a zúžení) *Když $f \in \mathcal{C}$ a X je libovolná množina, pak i $f \mid X \in \mathcal{C}$.*

Důkaz. Nechť f a X jsou, jak uvedeno, a jsou dány $b \in M(f \mid X)$ a ε. Tedy $b \in M(f)$ a protože $f \in \mathcal{C}$, existuje δ, že $f[U(b,\delta)] \subset U(f(b),\varepsilon)$. Ovšem $U(b,\delta) \cap M(f) \cap X \subset U(b,\delta) \cap M(f)$, takže

$$(f \mid X)[U(b,\, \delta)] \subset f[U(b,\, \delta)] \subset U(f(b),\, \varepsilon)$$

a restrikce $f \mid X$ je spojitá v b. Platí to pro každý bod $b \in M(f \mid X)$, takže $f \mid X \in \mathcal{C}$. □

• *Husté a řídké množiny.* Tyto množiny definujeme, když $N \subset M \subset \mathbb{R}$. Množina N je hustá v M, když pro každé $a \in M$ a δ je $U(a,\delta) \cap N \neq \emptyset$.

Úloha 6.1.6 *N je hustá v M $\iff$ pro každý bod $a \in M$ existuje taková posloupnost $(b_n) \subset N$, že $\lim b_n = a$.*

Úloha 6.1.7 *Ukažte, že obě množiny $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou husté v $\mathbb{R}$.*

Nechť $N \subset M \subset \mathbb{R}$. Množina N je řídká v M, když

$$\forall\, (a,\, b) \subset M\, \exists\, c,\, d\, \big(a \le c < d \le b \wedge N \cap (c,\, d) = \emptyset\big)$$

— každý netriviální interval v M obsahuje netriviální podinterval disjunktní s N.

Úloha 6.1.8 *Dokažte, že $N = \{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ je řídká v $M = [0,1]$.*

Tvrzení 6.1.9 (hustota a spojitost) *Nechť $f, g \in \mathcal{C}(M)$, N je hustá v M a $f \mid N = g \mid N$. Pak $f = g$.*

Důkaz. Nechť $b \in M$ a $(a_n) \subset N$ má $\lim a_n = b$. (H): $f(b) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = \lim g(a_n) = g(\lim a_n) = g(b)$. □

Řekneme, že funkce $g \in \mathcal{C}$ je jádro funkce $f \in \mathcal{C}$, pokud g je zúžení funkce f a $M(g)$ je hustá v $M(f)$. Funkci f z jádra snadno zrekonstruujeme: pro $b \in M(f)$ vezmeme $(a_n) \subset M(g)$ s $\lim a_n = b$ a pak $f(b) = \lim f(a_n)$.

Tvrzení 6.1.10 (komprese v $\mathcal{C}$) *Každá $f \in \mathcal{C}$ má nejvýše spočetné jádro.*

Důkaz. Stačí dokázat, že každá množina $M \subset \mathbb{R}$ má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu N. Vezmeme nějakou posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{Q}$, že $\{a_n :\ n \in \mathbb{N}\}$ je množina konečných desetinných rozvojů, a položíme $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, kde $X_n = \{b_n\}$ pro nějaký bod $b_n \in M$ s rozvojem shodujícím se na začátku s a_n, pokud takové b_n existuje, a jinak $X_n = \emptyset$ (opět užíváme axiom výběru). □

Každou funkci $f \in \mathcal{C}$ tak můžeme zkomprimovat do nejvýše spočetné (spojité) restrikce. Z ní pak f můžeme zpátky obnovit popsanými limitami.

Následující věta byla dokázána v roce 1922.

Věta 6.1.11 (Blumbergova) *Každá funkce $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ má spojité zúžení na nějakou množinu $M \subset \mathbb{R}$ hustou v $\mathbb{R}$.*

Americký matematik *Henry Blumberg (1886–1950)* se narodil v severní Litvě ve městě Žagarė, ale rodina již v r. 1891 emigrovala do Ameriky. Větu dokážeme v *MA 1*$^+$.

6.2 Počet spojitých funkcí

Ukážeme, že existuje bijekce mezi množinami $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}$.

- *Cantor–Bernsteinova věta.* O ni se při důkazu existence takové bijekce opřeme.

Věta 6.2.1 (Cantor–Bernsteinova) *Nechť X a Y jsou množiny. Když existují injekce $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to X$, potom existuje bijekce $h\colon X \to Y$.*

O G. Cantorovi jsme se již zmínili, *Felix Bernstein (1878–1956)* byl německý matematik. Větu dokážeme v *MA 1*$^+$. Například $(m, n) \mapsto 2^m 3^n$ je injekce z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ a $n \mapsto (1, n)$ je injekce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, takže podle C.–B. věty existuje bijekce z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Takovou bijekci ale v následující úloze dokážeme definovat bez pomoci jakékoli věty.

Úloha 6.2.2 *Dokažte, že funkce $s\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $s(m, n) = (2m - 1) \cdot 2^{n-1}$, je bijekce.*

- *Kolik je tedy spojitých funkcí $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?* Tolik jako reálných čísel.

Věta 6.2.3 (počet spojitých funkcí) *Existuje bijekce $h\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

Důkaz. Díky větě 6.2.1 stačí mít dvě injekce $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ a $g\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Injekce f je popsaná v úloze 6.2.4. Definujeme injekci g. Libovolnou funkci $j \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ zakódujeme do jediného čísla $g(j) \in \mathbb{R}$. Čísla v $\mathbb{R}$ bereme jako rozvoje s vynechanými znaménky $+$, např. $-\pi = -3.1415\ldots$ nebo $2022.0000\ldots$. Vezmeme dvě bijekce

$$r\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N} \text{ a } s\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,.$$

V úloze 6.2.2 je s dána vzorcem. Deset cifer 0, 1, …, 9, desetinnou tečku . a znaménko minus − kódujeme bijekcí

$$c\colon \{0,\,1,\,\ldots,\,9,\,.,\,-\} =: X \to Y := \{00,\,01,\,\ldots,\,09,\,10,\,11\}$$

pomocí dvojic cifer, třeba jako

$$c(0) = 00,\ c(1) = 01,\ \ldots,\ c(9) = 09,\ c(.) = 10 \ \text{ a } \ c(-) = 11\ .$$

Hodnotou $g(j) \in \mathbb{R}$ pro $j \in C(\mathbb{R})$ je rozvoj

$$g(j) = 0.\,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_{2n-1}\,a_{2n}\,\cdots \in [0,\,1)\ ,$$

jehož dvoučlenné bloky cifer $a_{2n-1}a_{2n} \in Y$ kódují hodnoty $j(\alpha)$ funkce j na zlomcích $\alpha \in \mathbb{Q}$. Podle úlohy 6.1.7 a tvrzení 6.1.9 je funkce j těmito hodnotami jednoznačně určena. Nechť tedy $\alpha \in \mathbb{Q}$, $r(\alpha) =: k \in \mathbb{N}$ a

$$j(\alpha) = b(k,\,1)\,b(k,\,2)\,\ldots\,b(k,\,l)\,\ldots\ ,$$

kde $l \in \mathbb{N}$ a $b(k,l) \in X$. Položíme $n = s(k,l)$ a

$$a_{2n-1}\,a_{2n} = c(b(k,\,l))\ .$$

Dá se vidět, že g je prostá, protože z rozvoje $g(j) \in \mathbb{R}$ funkci j jednoznačně zrekonstruujeme. Je jasné, že náležení $g(j)$ do $[0,1)$ a do $\mathbb{R}$ je vlastně zkratka za injekci $g(j) \mapsto F(g(j)) \in [0,1)$, $\mathbb{R}$, kde funkce F je definována za definicí 1.7.13. Podle části 2 věty 1.7.16 jde skutečně o injekci. □

Úloha 6.2.4 *Dokažte, že zobrazení $a \mapsto k_a$ je injekce z $\mathbb{R}$ do $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

Úloha 6.2.5 *Pro $\forall$ neprázdnou reálnou množinu M $\exists$ bijekce $h\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}(M)$.*

6.3 Nabývání mezihodnot

Dokážeme, že spojité funkce zobrazují intervaly na intervaly. V oddílu **??** uvidíme, že tuto vlastnost mají i všechny funkce, které jsou derivacemi.

• *Spojitá funkce nabývá všechny mezihodnoty.* Obraz funkce signum $\mathrm{sgn} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ je množina $\mathrm{sgn}[\mathbb{R}] = \{-1, 0, 1\}$, takže i když $\frac{1}{2} \in (0,1)$, neexistuje b se $\mathrm{sgn}(b) = \frac{1}{2}$. Pro spojité funkce se toto nestane.

Věta 6.3.1 (nabývání mezihodnot) *Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}([a,b])$ & $f(a) < c < f(b)$ nebo $f(a) > c > f(b)$. Pak pro nějaké $d \in (a,b)$ se $f(d) = c$.*

Důkaz. Nechť $f(a) < c < f(b)$, případ $f(a) > c > f(b)$ je podobný. Položíme $X = \{x \in [a,b] :\ f(x) < c\}$ a $d = \sup(X)$, patrně $d \in [a,\,b]$. Ze spojitosti f v a a v b plyne, že $d \in (a,b)$. Uvidíme, že $f(d) < c$ a $f(d) > c$ vedou ke sporu, tedy $f(d) = c$. Nechť $f(d) < c$. Ze spojitosti f v d plyne existence δ, že pro každé $x \in U(d, \delta) \cap [a, b]$ je $f(x) < c$. Pak ale X obsahuje čísla větší než d, což je spor. Nechť $f(d) > c$. Ze spojitosti f v d plyne existence δ, že pro každé $x \in U(d, \delta) \cap [a, b]$ je $f(x) > c$. Pak ale každé $x < d$ a blízké d leží mimo X, což je také spor. □

Úloha 6.3.2 *Pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ a každou funkci $f \in \mathcal{C}(I)$ je $f[I]$ interval.*

Důsledek 6.3.3 (obraz funkce exp) *Platí, že* $\exp[\mathbb{R}] = (0, +\infty)$. *Tedy* exp *je bijekce z* $\mathbb{R}$ *do* $(0, +\infty)$.

Důkaz. Protože $\exp > 0$ na $\mathbb{R}$, je $\exp[\mathbb{R}] \subset (0, +\infty)$. Z limit $\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$ a $\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$ (část 3 tvrzení 4.3.6), ze spojitosti exponenciály (důsledek 6.6.6) a z věty 6.3.1 plyne, že $(0, +\infty) \subset \exp[\mathbb{R}]$. Tedy $\exp[\mathbb{R}] = (0, +\infty)$. Exponenciála roste a je proto bijekce. □

Úloha 6.3.4 *Dokažte následující důsledek.*

Důsledek 6.3.5 (alpinistický) *Horolezec začne o půlnoci výstup, po 24 hodinách dosáhne vrcholu a pak zase 24 hodin sestupuje do základního tábora. Ukažte, že existuje čas $t_0 \in [0, 24]$, kdy se v obou dnech nachází ve stejné nadmořské výšce.*

Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ roste, resp. klesá, na (libovolné) množině X, pokud pro každé $x < y$ v $M \cap X$ je $f(x) < f(y)$, resp. $f(x) > f(y)$.

Důsledek 6.3.6 (spojitost a prostota) *Když $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f \in \mathcal{C}(I)$ je prostá, pak f buď roste, anebo klesá.*

Důkaz. Kdyby f ani nerostla ani neklesala, v I by se našla tři čísla $a < b < c$, že $f(a) < f(b) > f(c)$ nebo $f(a) > f(b) < f(c)$. V prvním případu pro každé d s $f(a), f(c) < d < f(b)$ podle věty 6.3.1 existují $x \in (a, b)$ a $y \in (b, c)$, že $d = f(x) = f(y)$, ve sporu s prostotou funkce f. Druhý případ vede na podobný spor. □

Teď je snadné dokázat větu 1.6.16, kterou zde zopakujeme jako důsledek.

Důsledek 6.3.7 (Bolzano–Cauchyova věta) *Nechť I je interval, $f \in \mathcal{C}(I)$ & pro nějaké $a, b \in I$ je $f(a)f(b) \le 0$. Pak existuje $c \in I$, že $f(c) = 0$.*

Důkaz. Pokud $f(a)f(b) = 0$, je $f(a) = 0$ nebo $f(b) = 0$. Pokud $f(a)f(b) < 0$, pak $a \neq b$ & $f(a) < 0 < f(b)$ nebo $f(b) < 0 < f(a)$. Použijeme větu 6.3.1. □

6.4 Kompaktnost

Kompaktní množiny jsou základním nástrojem analýzy. Budeme se ale zabývat jen reálnými a prozkoumáme jejich vztahy ke spojitým funkcím. Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, když každá posloupnost $(a_n) \subset M$ má podposloupnost (a_{m_n}) s limitou $\lim a_{m_n}$ v M. Podle Bolzano–Weierstrassovy věty a věty o limitě a uspořádání každý interval $[a, b]$ je kompaktní. Později všechny kompaktní množiny popíšeme.

• *Minima a maxima.* Ukážeme, že spojitá funkce s kompaktním definičním oborem vždy nabývá nejmenší a největší hodnotu.

Věta 6.4.1 (minima a maxima) *Nechť $f \in \mathcal{C}(M)$, kde $M \neq \emptyset$ je kompaktní množina. Pak existují body $a, b \in M$, že pro každé $x \in M$ je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Bod a, resp. b, je bod minima, resp. bod maxima, funkce f.*

Důkaz. Dokážeme existenci bodu maxima, minimum se řeší podobně. Nechť $A = \sup(f[M])$, bráno v LU $(\mathbb{R}^*, <)$. Patrně $f[M] \neq \emptyset$ a lze vzít $(a_n) \subset M$ s $\lim f(a_n) = A$. Nějaká podposloupnost (a_{m_n}) má $\lim a_{m_n} = b \in M$. Podle (H) se $f(b) = \lim f(a_{m_n}) = \lim f(a_n) = A$, speciálně $A \in \mathbb{R}$. Pro každé $x \in M$ tak $f(x) \leq A = f(b)$. □

Úloha 6.4.2 *Spojité funkce $f, g\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a $g(x) = x$, nemají body maxima.*

Zavedeme globální a lokální extrémy funkcí. Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ má v bodu $b \in M$ globální maximum, resp. globální minimum, když pro $\forall x \in M$ je $f(x) \leq f(b)$, resp. $f(x) \geq f(b)$. Řekneme, že funkce f má v $b \in M$ lokální maximum, resp. lokální minimum, když pro nějaké δ pro každé $x \in U(b, \delta) \cap M$ je $f(x) \leq f(b)$, resp. $f(x) \geq f(b)$. Platí-li pro každé $x \neq b$ tyto nerovnosti jako ostré (jako $<$, resp. $>$), mluvíme o ostrém globálním maximu, atd.

• *Spojitý obraz kompaktu je kompakt.* To je jeden z nejdůležitějších výsledků o kompaktních množinách, zejména ve své obecné podobě v topologii.

Věta 6.4.3 (obraz kompaktu) *Když $f \in \mathcal{C}(M)$ pro kompaktní množinu M, pak $f[M]$ je kompaktní množina.*

Důkaz. Nechť f a M jsou, jak uvedeno, a $(b_n) \subset f[M]$. Vezmeme $(a_n) \subset M$, že $f(a_n) = b_n$ (použili jsme axiom výběru), a podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = a \in M$. (H): $\lim f(a_{m_n}) = f(a) = b$, takže $(b_{m_n}) = (f(a_{m_n}))$ má limitu $\lim b_{m_n} = b \in f[M]$. Tedy $f[M]$ je kompaktní. □

Úloha 6.4.4 *Jak spolu souvisí věty 6.4.3 a 6.4.1?*

• *Otevřené a uzavřené množiny.* Množina $M \subset \mathbb{R}$ je otevřená, když pro každý bod $b \in M$ existuje δ, že $U(b, \delta) \subset M$. Množina M je uzavřená, když její doplněk $\mathbb{R} \setminus M$ je otevřená množina.

Úloha 6.4.5 *Platí následující.*
1. *Obě množiny $\emptyset$ a $\mathbb{R}$ jsou otevřené i uzavřené.*
2. *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.*
3. *Průnik konečného systému otevřených množin je otevřená množina.*
4. *Sjednocení konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*
5. *Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

Tvrzení 6.4.6 (o uzavřených množinách) *Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená, $\iff$ pro každou konvergentní posloupnost $(a_n) \subset M$ její limita leží v M.*

Důkaz. $\Rightarrow$. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřená a $(a_n) \subset M$ má $\lim a_n = a$. Když $a \in \mathbb{R} \setminus M$, pak pro nějaké δ je $U(a, \delta) \cap M = \emptyset$. To ale vzhledem k $a_n \to a$ není možné, tedy $a \in M$.

$\neg \Rightarrow \neg$. Když $M \subset \mathbb{R}$ není uzavřená, existuje $a \in \mathbb{R} \setminus M$, že pro každé n máme nějaké $a_n \in U(a, 1/n) \cap M$. Tedy $(a_n) \subset M$ & $\lim a_n = a \notin M$ (opět užíváme axiom výběru). $\Box$

Tvrzení 6.4.7 (obraz otevřené množiny) *$f \in \mathcal{C}(M)$ buď prostá funkce a M buď otevřená množina. Pak i $f[M]$ je otevřená množina.*

Důkaz. Nechť M a f jsou, jak uvedeno, a nechť $b \in f[M]$. Položíme $a = f^{-1}(b) \in M$. Díky otevřenosti M vezmeme nějaký interval $[a - \delta, a + \delta] \subset M$. Pak $f(a-\delta) < b < f(a+\delta)$ nebo $f(a-\delta) > b > f(a+\delta)$ (jak $f(a-\delta), f(a+\delta) < b = f(a)$, tak $f(a - \delta), f(a + \delta) > b = f(a)$ vede podle věty 6.3.1 ke sporu s prostotou f). Vezmeme ε, že $\varepsilon < \min(\{|f(a + \delta) - b|, |f(a - \delta) - b|\})$. Pak věta 6.3.1 dává, že $U(b, \varepsilon) \subset f[(a - \delta, a + \delta)] \subset f[M]$. Tedy $f[M]$ je otevřená množina. $\Box$

Otevřené množiny si díky následujícímu popisu jejich struktury lze docela dobře představit. Otevřené intervaly jsou intervaly tvaru $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ a (a, b) s $a < b$.

Tvrzení 6.4.8 (o otevřených množinách) *$M \subset \mathbb{R}$ je otevřená $\iff$ existuje nejvýše spočetný systém disjunktních otevřených intervalů $\{I_j : j \in J\}$ s $\bigcup_{j \in J} I_j = M$.*

Důkaz. $M \subset \mathbb{R}$ buď neprázdná otevřená množina (pro $M = \emptyset$ tvrzení platí triviálně s $J = \emptyset$) a pro $a \in M$ definujeme I_a jako vzhledem k inkluzi maximální otevřený interval I splňující, že $a \in I \subset M$. Patrně $I_a = (\inf A, \sup B)$, infimum a supremum bereme v $(\mathbb{R}^*, <)$, kde $A \subset \mathbb{R}$ jsou ty $b < a$, že $(b, a) \subset M$ a podobně B jsou ty $b > a$, že $(a, b) \subset M$. Pro $a, b \in M$ patrně vždy buď $I_a = I_b$, anebo $I_a \cap I_b = \emptyset$. Hledaný systém intervalů je tedy $\{I_a : a \in \mathbb{Q} \cap M\}$. $\Box$

• *Cantorovo diskontinuum.* Uzavřená množina $\mathbb{R} \setminus M$ pak je sjednocením „mezer“ mezi těmito intervaly I_j. Když $|J| = n$, je mezer nejvýše $n + 1$. Obtížně představitelné je, že pro spočetnou J množina mezer může být nespočetná.

Takové uzavřené množiny se dosti špatně představují — příkladem je takzvané Cantorovo diskontinuum, což je množina

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \ (\subset [0,1] = C_0),\ \ C_n = \tfrac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\tfrac{1}{3}C_{n-1} + \tfrac{2}{3}\right).$$

Méně formálně řečeno, C je to, co z intervalu $[0,1]$ zbude, když z něj vynecháme otevřenou prostřední třetinu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ze zbytku $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ vynecháme otevřené prostřední třetiny $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ a $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, atd.

Úloha 6.4.9 *C je nespočetná uzavřená množina s „délkou" rovnou* 0.

• *Charakterizace kompaktních množin.* Množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, existuje-li $c > 0$, že pro každé $a \in M$ je $|a| \le c$ (takže $M \subset [-c, c]$). Následující věta popisuje všechny kompaktní množiny v $\mathbb{R}$.

Věta 6.4.10 (kompaktní reálné množiny) *$M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní $\iff$ M je omezená a uzavřená.*

Důkaz. Nechť M je omezená a uzavřená a $(a_n) \subset M$. Podle B.–W. věty máme konvergentní podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = a \in \mathbb{R}$. M je uzavřená a podle tvrzení 6.4.6 je $a \in M$. Tedy M je kompaktní.

Nechť M není omezená. Sestrojíme posloupnost $(a_n) \subset M$, že $|a_m - a_n| \ge 1$ jakmile $m \ne n$. To se dědí na podposloupnosti, které tedy nekonvergují a M není kompaktní. První člen a_1 je libovolný. Nechť jsou definovány $a_1, a_2, \dots, a_n$ a splňují, že $|a_i - a_j| \ge 1$ jakmile $i \ne j$. Protože M není omezená, existuje $a_{n+1} \in M$, že $|a_{n+1}| \ge 1 + \max(\{|a_1|, \dots, |a_n|\})$. Pak je $|a_{n+1} - a_i| \ge 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Takto dostaneme (a_n).

Nechť M není uzavřená. Podle tvrzení 6.4.6 existuje posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = a \in \mathbb{R} \setminus M$. Stejnou limitu a má i každá podposloupnost, která tedy v M nekonverguje. M není kompaktní. □

Úloha 6.4.11 *Každá množina $[a,b] \setminus P(c,\delta)$ je kompaktní.*

6.5 Stejnoměrná spojitost

je důležité zesílení spojitosti funkce. Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ je stejnoměrně spojitá, když pro každé ε existuje δ, že vždy

$$a, b \in M \wedge |a - b| \le \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| \le \varepsilon .$$

Množinu stejnoměrně spojitých funkcí $f \in \mathcal{F}(M)$ označíme jako $\mathcal{UC}(M)$ ($\mathcal{U}$ jako „uniformně"). Položíme $\mathcal{UC} = \bigcup_{M \subset \mathbb{R}} \mathcal{UC}(M)$.

Úloha 6.5.1 *Stejnoměrně spojitá funkce je spojitá, $\mathcal{UC} \subset \mathcal{C}$.*

Naopak každá funkce spojitá na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.

Tvrzení 6.5.2 (kompaktnost a $\mathcal{UC}$) *M je kompaktní $\Rightarrow \mathcal{C}(M) \subset \mathcal{UC}(M)$.*

Důkaz. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní a $f \in \mathcal{F}(M)$ není stejnoměrně spojitá. Odvodíme, že f není spojitá. Negace hořejší definice je, že

$$\exists\, \varepsilon\; \forall\, \delta\; \exists\, a, b \in M\; \big(|a - b| \le \delta \wedge |f(a) - f(b)| > \varepsilon\big)\;.$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $\delta = 1/n$ a odpovídající body a a b označíme a_n a b_n (užíváme axiom výběru). Protože M je kompaktní, (a_n) a (b_n) mají podposloupnosti s touž limitou $c \in M$ (protože $|a_n - b_n| \le 1/n$). Pro jednoduchost značení předpokládáme, že již $\lim a_n = \lim b_n = c$. Protože $|f(a_n) - f(b_n)| > \varepsilon$ pro každé n, obě posloupnosti $(f(a_n))$ a $(f(b_n))$ nemohou současně konvergovat k $f(c)$. Podle ekvivalence (H) tedy f není spojitá v bodu $c \in M$. $\square$

Úloha 6.5.3 *Spojité funkce $f, g\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$ a $g(x) = \sin(1/x)$, nejsou stejnoměrně spojité.*

Následující tvrzení je mnohem důležitější, než by se mohlo zdát.

Tvrzení 6.5.4 (rozšiřování $\mathcal{UC}$ funkcí) *Nechť $f \in \mathcal{UC}(M)$ a $b \in L(M)$. Pak existuje c, že pro každou posloupnost $(a_n) \subset M$ s $\lim a_n = b$ se $\lim f(a_n) = c$. Funkci f tak lze spojitě rozšířit do bodu b hodnotou $f(b) = c$.*

Důkaz. Nechť f, M a b jsou, jak uvedeno, $(a_n), (a_n') \subset M$ mají limitu $\lim a_n = \lim a_n' = b$ a je dáno ε. Vezmeme δ zaručené stejnoměrnou spojitostí funkce f. Pak pro velké m a n je $|a_m - a_n'| \le \delta$, takže pro tatáž m a n je $|f(a_m) - f(a_n')| \le \varepsilon$. Volba $(a_n) = (a_n')$ dává, že posloupnost $(f(a_n))$ je cauchyovská. Má tedy, podle věty 2.3.20, limitu $\lim f(a_n) = c$. Při volbě $(a_n) \ne (a_n')$ vidíme, že c nezávisí na posloupnosti (a_n). $\square$

Jak je předvedeno v [7], pomocí tohoto rozšiřování lze ve velké části reálné analýzy eliminovat nespočetné množiny, tedy zejména nespočetné funkce, a vybudovat ji jen za pomoci dědičně nejvýše spočetných množin. Stejnoměrná spojitost funkce přebírá roli kompaktnosti definičního oboru.

6.6 Operace na funkcích a spojitost

Prozkoumáme, při kterých operacích s funkcemi se zachová spojitost.

• *Aritmetika spojitosti.* Připomeňte si aritmetiku funkcí ze čtvrté přednášky.

Věta 6.6.1 (aritmetika spojitosti) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}$. Platí následující.*
1. *Jsou-li funkce f a g spojité v bodu $b \in M(f) \cap M(g)$, jsou spojité v b i funkce $f + g$ a fg. Jsou-li f a g spojité v bodu $b \in M(f/g)$, je spojitá v b i f/g.*
2. *Když $f, g \in \mathcal{C}$, pak i $f + g, fg, f/g \in \mathcal{C}$.*

Důkaz. 1. Probereme jen podíl f/g, součet a součin se řeší podobně. Nechť f, g a b jsou, jak uvedeno, & $(a_n) \subset M(f/g)$ má limitu b. Podle ekvivalence (H) se $\lim f(a_n) = f(b)$ a $\lim g(a_n) = g(b)$. Díky větě 3.1.2 se

$$\lim(f/g)(a_n) = \lim \tfrac{f(a_n)}{g(a_n)} = \tfrac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \tfrac{f(b)}{g(b)} = (f/g)(b)\,.$$

Podle ekvivalence (H) je tedy f/g spojitá v b.

2. Plyne to z první části. □

Úloha 6.6.2 *Dokažte, že* POL, RAC $\subset \mathcal{C}$. *Polynomy a racionální funkce jsou tedy spojité.*

• *Spojitost mocninných řad.* Postupně dokážeme spojitost elementárních funkcí zavedených v oddílech 4.3 a 4.4. Ty, co jsou definované skládáním a invertováním, si necháme na později, nejdřív se musí dokázat zachování spojitosti v těchto operacích. Spojitost exponenciály, kosinu a sinu, které jsou součty mocninných řad, ale plyne hned z věty níže.

Věta 6.6.3 (spojitost MŘ) *Nechť pro* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *máme* $\lim |a_n|^{1/n} = 0$. *<u>Pak</u> pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *řada* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *je abskon a* $S(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Důkaz. Nechť a_n jsou, jak je uvedeno, a $x \in \mathbb{R}$. Pak $0 \le |a_n|^{1/n}|x| \le \frac{1}{2}$ pro $n \ge n_0$, takže $|a_n x^n| \le (\frac{1}{2})^n$ pro $n \ge n_0$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je tedy abskon a konverguje. Dále

$$\begin{aligned} |S(x+c) - S(x)| &= |c| \cdot \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{n} \tbinom{n}{i} c^{i-1} x^{n-i} \Big| \\ &\le |c| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot (|x| + |c|)^{n-1} \cdot 2^n \to 0, \text{ když } c \to 0\,. \end{aligned}$$

Funkce S je tedy spojitá v bodu x. □

Úloha 6.6.4 *Vysvětlete, proč v předešlém důkazu platí vysazená rovnost a jak se dostane následující nerovnost.*

Úloha 6.6.5 *Dokažte, že* $\lim(n!)^{1/n} = +\infty$.

Důsledek 6.6.6 (spojitost $\exp x$, $\cos x$ a $\sin x$) *Tyto tři funkce jsou spojité na celém* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Plyne to z definic $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ a $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ a z věty 6.6.3 a úlohy 6.6.5. □

Důsledek 6.6.7 (spojitost $\tan x$ a $\cot x$) *Obě funkce jsou spojité na svých definičních oborech.*

Důkaz. Jak víme, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Spojitost těchto funkcí tedy plyne z důsledku 6.6.6 a z věty 6.6.1. $\square$

• *Složené funkce a inverzy.* Připomeňme si skládání funkcí z oddílu 1.3. Pro funkce $f, g \in \mathcal{R}$ jejich složenina $f(g)\colon M(f(g)) \to \mathbb{R}$ má hodnoty $f(g)(x) = f(g(x))$ a definiční obor $M(f(g)) = \{x \in M(g):\ g(x) \in M(f)\}$.

Věta 6.6.8 (spojitost a skládání) *Nechť $f, g \in \mathcal{R}$. Pak platí následující.*
1. *Je-li g spojitá v $b \in M(f(g))$ a f v $g(b)$, je $f(g)$ spojitá v b.*
2. *Když $f, g \in \mathcal{C}$, pak i $f(g) \in \mathcal{C}$.*

Důkaz. 1. Nechť f, g a b jsou, jak uvedeno, a $(b_n) \subset M(f(g))$ je posloupnost s $\lim b_n = b$. Pak $\lim g(b_n) = g(b)$ podle ekvivalence (H). Tedy, opět podle ekvivalence (H), $\lim f(g)(b_n) = \lim f(g(b_n)) = f(g(b)) = f(g)(b)$. Podle ekvivalence (H) je tedy funkce $f(g)$ spojitá v bodu b.

2. Plyne to z první části. $\square$

Operace inverzu spojitost obecně nezachovává. Například funkce $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ s hodnotami $f(0) = 0$ a $f(n) = \frac{1}{n}$ pro $n > 0$ je spojitá, ale její inverz $0 \mapsto 0$ a $\frac{1}{n} \mapsto n$ není spojitý v 0. Následující věta tak nabývá na důležitosti.

Věta 6.6.9 (spojitost inverzu) *Nechť $f \in \mathcal{C}(M)$ je prostá funkce. V každé z následujících pěti situací je její inverz $f^{-1} \in \mathcal{F}(f[M])$ spojitý.*
1. *M je kompaktní množina.*
2. *M je interval.*
3. *M je otevřená množina.*
4. *M je uzavřená množina a funkce f je monotónní.*
5. *$M \subset (a, b)$ je hustá v intervalu (a, b), f je monotónní a stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. 1. Nechť M je kompaktní, $b \in f[M]$ a $(b_n) \subset f[M]$ má $\lim b_n = b$. Nechť $a = f^{-1}(b)$ a $a_n = f^{-1}(b_n)$ $(\in M)$. Dokážeme, že $\lim a_n = a$, což díky (H) dá spojitost funkce f^{-1} v b. Dokážeme, že každá podposloupnost posloupnosti (a_n) má podposloupnost s limitou a. Podle části 3 věty 2.2.5 pak je $\lim a_n = a$. Nechť (a'_n) je podposloupnost posloupnosti (a_n). Použijeme kompaktnost M a vezmeme podposloupnost (a_{m_n}) v (a'_n) s $\lim\, a_{m_n} = c \in M$. Podle ekvivalence (H) je $\lim\, f(a_{m_n}) = f(c) = b$, protože $(f(a_{m_n}))$ je podposloupnost posloupnosti (b_n). Vzhledem k prostotě f se $c = a$.

2. Nechť M je interval. Podle důsledku 6.3.6 f roste nebo klesá. Nechť f klesá, případ rostoucí f je podobný. Podle věty 6.3.1 je $f[M]$ interval. Nechť $b \in f[M]$ a je dáno ε. Ukážeme, že f^{-1} je zprava spojitá v b. Je tomu tak, když b je pravý konec intervalu $f[M]$, pak $U^+(b, \delta) \cap f[M] = \{b\}$. Nechť b není pravý konec intervalu $f[M]$. Protože f^{-1} klesá, $a = f^{-1}(b) \in M$ není levý konec intervalu M a búno ε je tak malé, že $[a - \varepsilon, a] \subset M$. Položíme

$$\delta = f(a - \varepsilon) - f(a) = f(a - \varepsilon) - b > 0\ .$$

Podle věty 6.3.1 funkce f je (klesající) bijekce z $[a-\varepsilon, a]$ do $[b, b+\delta]$ a tedy také z $(a-\varepsilon, a]$ do $[b, b+\delta)$. Tedy $[b, b+\delta) \subset f[M]$ a $U^+(b,\,\delta) \cap f[M] = U^+(b,\,\delta) = [b, b+\delta)$. Takže

$$f^{-1}[U^+(b,\,\delta)] = U^-(a,\,\varepsilon) \subset U(a,\,\varepsilon) = U(f^{-1}(b),\,\varepsilon)$$

a f^{-1} je zprava spojitá v b. Spojitost funkce f^{-1} v b zleva se dokáže podobně. Podle úlohy 5.2.10 je f^{-1} v b spojitá.

3. Nechť M je otevřená množina. Nechť $b \in f(M)$, $a = f^{-1}(b)$ ($\in M$) a je dáno ε. Pro dostatečně malé ε je $U(a,\varepsilon) \subset M$. Podle tvrzení 6.4.7 je množina $f[U(a,\varepsilon)] \ni b$ otevřená a pro nějaké δ je $U(b,\delta) \subset f[U(a,\varepsilon)]$. Tedy

$$f^{-1}[U(b,\,\delta)] \subset U(a,\,\varepsilon) = U(f^{-1}(b),\,\varepsilon)$$

a funkce f^{-1} je spojitá v bodu b (podle definice 5.2.1).

4. Nechť M je uzavřená množina a nechť f roste, pro klesající f se argumentuje podobně. Pro spor nechť pro nějaké $b \in f[M]$ s $a = f^{-1}(b)$ ($\in M$) existuje taková posloupnost $(b_n) \subset f[M]$, že $\lim b_n = b$, ale $\lim f^{-1}(b_n)$ neexistuje nebo se liší od a. Podle části 2 věty 2.2.5 a podle tvrzení 2.3.12 má (b_n) takovou klesající nebo rostoucí podposloupnost (c_n), že $\lim f^{-1}(c_n) = B$ ($\in \mathbb{R}^*$) a $B \neq a$. Předpokládáme, že (c_n) klesá, případ rostoucí (c_n) je podobný. Pak $b < \cdots < c_2 < c_1$, tedy $a < \cdots < f^{-1}(c_2) < f^{-1}(c_1)$ (f i f^{-1} roste). Podle části 2 věty 3.3.2 je $B \in [a, f^{-1}(c_1))$ a tak, klíčově, $B \in \mathbb{R}$ (zde argument selhává, není-li f monotónní). Dokonce $B \in M$, protože M je uzavřená. Díky spojitosti f v B máme, že $f(B) = \lim f(f^{-1}(c_n)) = \lim c_n = b = f(a)$. To je ale ve sporu s prostotou f, protože $B \neq a$.

5. Užijeme tvrzení 6.5.4 a funkci f spojitě rozšíříme do funkce $\overline{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Díky tvrzení 3.3.6 a díky hustotě M v (a,b) je funkce $\overline{f}$ ryze monotónní a tedy je prostá. Podle části 1 nebo části 2 je funkce $(\overline{f})^{-1}$ spojitá. Podle tvrzení 6.1.5 je spojitá i funkce $(\overline{f})^{-1} \mid f[M] = f^{-1}$. □

V *MA 1*$^+$ předešlou větu dokážeme znovu v širším kontextu a část 5 dokonce zobecníme.

Úloha 6.6.10 *Ukažte na příkladech, že v části 4 předešlé věty nelze ani jeden z obou předpokladů (uzavřenost M, monotonie f) vynechat.*

• *Elementární funkce.* Dokončíme důkazy jejich spojitosti.

Úloha 6.6.11 *Dokažte pomocí předešlé věty následující tvrzení.*

Tvrzení 6.6.12 (spojitost $\log x$, $\arccos x$, $\arcsin x$, $\arctan x$ a $\mathrm{arccot}\, x$) *Tyto funkce jsou spojité na svých definičních oborech.*

Tvrzení 6.6.13 (spojitost funkce x^b) *Pro každé pevné $b \in (0, +\infty)$ je funkce $x^b\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ spojitá.*

Důkaz. Spojitost v každém bodu $x > 0$ dostáváme z vyjádření $x^b = \exp(b \log x)$, ze spojitosti exponenciály (důsledek 6.6.6) a logaritmu (tvrzení 6.6.12), ze spojitosti konstantní funkce k_b (úloha 6.1.3) a ze spojitosti součinu funkcí (věta 6.6.1) a složené funkce (věta 6.6.8). Spojitost v bodu $x = 0$ plyne pomocí tvrzení 5.2.4 z limity

$$\lim_{x \to 0} x^b = \lim_{x \to 0} \exp(b \log x) = \lim_{y \to -\infty} \exp y = 0 = 0^b \ .$$

Druhá rovnost zde plyne z věty 5.4.1 a z části 2 tvrzení 4.3.9. Třetí plyne z části 3 tvrzení 4.3.6. □

Rekapitulujme spojitost elementárních funkcí.

Věta 6.6.14 (spojitost EF) EF $\subset \mathcal{C}$, *každá elementární funkce je spojitá.*

Důkaz. Indukce podle generující posloupnosti dané elementární funkce f (definice 4.4.13). Je-li f konstantní funkce, exponenciála, logaritmus, x^b s necelým exponentem $b > 0$, sinus nebo arkus sinus, je spojitá díky, po řadě, úloze 6.1.3, důsledkům 6.6.6 a 6.6.12, tvrzení 6.6.13 a důsledkům 6.6.6 a 6.6.12. Je-li f součet, součin, podíl nebo složenina dvou jednodušších elementárních funkcí, je spojitá díky indukci a větám 6.6.1 a 6.6.8. □

Kapitola 7

Přednáška 7. Derivace funkcí

V sedmé přednášce přicházejí na scénu derivace. Přednesl jsem ji 4. 4. 2024 jako

`https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/MAI24_pred7.pdf` .

Zde je rozšířena, například o důkazy vzorců pro derivaci složené funkce a derivaci inverzu.

V oddílu 7.1 definujeme obyčejné i jednostranné derivace funkcí pro zcela obecné definiční obory. V literatuře se často předpokládá, že funkce je definovaná na nějakém okolí daného bodu nebo dokonce na nějakém netriviálním intervalu. Věta 7.1.7 je verze známé nutné podmínky pro existenci lokálního extrému pro naši obecnou situaci. Diferencovatelnost funkce implikuje její spojitost v daném bodu (tvrzení 7.1.10), ale i to, že funkční hodnota je limitním bodem oboru hodnot funkce (tvrzení 7.1.13 a úloha 7.1.15). Tvrzení 7.1.20 uvádí příklad nespojité derivace. Druhý příklad takové derivace je v závěru v úloze 7.5.7.

Oddíl 7.2 začneme standardní definicí 7.2.1 tečny a v definici 7.2.7 zavedeme limitní tečny. To je formalizace intuice tečny v bodu $B \in G_f$ jako limity posloupnosti sečen procházejících B a dalším bodem v grafu jdoucím k B. Věta 7.2.9 dokazuje ekvivalenci obou definic. Ve větě 7.2.11 ukážeme, že tečna v B je i limitou sečen procházejících dvěma body grafu jdoucími k bodu B, ale jím oddělenými. K tečnám se vrátíme v *MA 1*$^+$.

Oddíl 7.3 se zabývá aritmetikou derivací. Tvrzení 7.3.1 popisuje derivaci lineární kombinace, obecně *neplatí*, že $(f+g)' = f' + g'$. Věta 7.3.3, resp. 7.3.6, uvádí bodovou i globální formu Leibnizova vzorce pro derivaci součinu, resp. vzorce pro derivaci podílu.

Oddíl 7.4 je věnován derivacím složených funkcí (věta 7.4.1) a derivacím inverzů (věta 7.4.3 a důsledek 7.4.5). Vždy uvádíme bodový i globální tvar vzorce a povolujeme libovolný definiční obor. Důkazy využívají Heineho definici derivace. V oddílu 7.5 ve větě 7.5.1 zderivujeme mocninnou řadu, čímž dostaneme derivace funkcí e^x, $\sin x$ a $\cos x$. Odvodíme i derivaci logaritmu, ale derivace ostatních Základních elementárních funkcí (definice 4.3.1) přenecháváme úlohám.

7.1 Derivace a lokální extrémy

• *Derivace funkce v bodu.* Následující definice je základní. Jak jsme v úvodu prozradili, v literatuře není zdaleka stabilizovaná. To u tak základní definice docela překvapuje. Jak uvidíme zde a v dalších přednáškách, pomocí derivací lze nalézt extrémní hodnoty funkcí a v grafech určit intervaly monotonie či intervaly konvexity, resp. konkavity. Dále lze funkce s pomocí derivací aproximovat polynomy a vyjádřit mocninnými řadami.

Definice 7.1.1 (derivace v bodu) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a bod $b \in M \cap L(M)$. Derivace funkce f v bodu b je limita*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \stackrel{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \quad (\in \mathbb{R}^*)\,,$$

když existuje. Značíme ji jako $f'(b)$ nebo jako $\frac{df}{dx}(b)$.

Úloha 7.1.2 *Jak dokážete rovnost $(*)$?*

Když $f'(b) \in \mathbb{R}$, řekneme, že funkce f je v bodu b diferencovatelná. Funkce pak má u b lokální aproximaci lineární funkcí, zvanou tečna:

$$f(x) = \underbrace{f(b) + f'(b) \cdot (x - b)}_{\text{tečna}} \;+\; \underbrace{o(x - b)}_{\text{chyba}} \quad (x \to b)\,.$$

Tvrzení 7.1.3 (Heineho definice derivace) *Nechť funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ a bod $b \in L(M) \cap M$. Potom $f'(b) = B \iff$ pro každou posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ s $\lim a_n = b$ se $\lim \frac{f(a_n) - f(b)}{a_n - b} = B$.*

Důkaz. Plyne to z definice 7.1.1 a věty 4.2.12. □

Pokud existuje $f'(b)$, implicitně je $b \in M(f) \cap L(M(f))$ a nebudeme to vždy explicitně zmiňovat.

• *Jednostranné derivace.* Definují se pomocí jednostranných limit. Nechť f je v $\mathcal{F}(M)$ a $b \in L^-(M) \cap M$. Potom limitu $f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ $(\in \mathbb{R}^*)$ nazveme levou derivací (či derivací zleva) funkce f v bodu b. Změnou znaménka $^-$ na znaménko $^+$ dostaneme pravou derivaci (či derivaci zprava) $f'_+(b)$ funkce f v bodu b.

Úloha 7.1.4 *Platí následující.*
1. $f'(a) = L \Rightarrow f'_-(a) = L$ *nebo* $f'_+(a) = L$.
2. $f'_-(a) = f'_+(a) = L \Rightarrow f'(a) = L$.
3. $f'_-(a) = K \neq L = f'_+(a) \Rightarrow f'(a)$ *neexistuje.*

Úloha 7.1.5 *Jako v tvrzení 5.1.13 o limitách funkcí i jednostranná derivace funkce se dá pomocí zúžení funkce převést na obyčejnou derivaci. Zformulujte to přesně a dokažte.*

• *Derivace a extrémy.* Teď si zahraje dřívější definice oboustranných limitních bodů množiny $M \subset \mathbb{R}$, zkratkou OLB (a je OLB množiny M, právě když $\forall\,\delta\,\big(P^-(a,\delta) \cap M \neq \emptyset \wedge P^+(a,\delta) \cap M \neq \emptyset\big)$). Jejich množina je označená jako $L^{\pm}(M)$ $(\subset \mathbb{R})$.

Úloha 7.1.6 *Každý* OLB *množiny M je jejím limitním bodem. Naopak to obecně neplatí.*

Známý výsledek o vztahu derivací a extrémů upravíme pro obecné definiční obory funkcí.

Věta 7.1.7 (derivace a extrémy) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M \cap L^{\pm}(M)$ a nechť $f'(b)$ $(\in \mathbb{R}^*)$ existuje a není* 0. *Potom v b funkce f nemá lokální extrém, takže pro každé δ existují body $c, d \in U(b,\delta) \cap M$ s $f(c) < f(b) < f(d)$.*

Důkaz. Nechť f, M a b jsou, jak je uvedeno, a je dáno δ. Nechť $f'(b) < 0$, případ s $f'(b) > 0$ je podobný. Vezmeme tak malé ε, že $U(f'(b),\varepsilon) < \{0\}$. Podle definice 7.1.1 existuje $\theta \le \delta$, že

$$x \in P(b,\,\theta) \cap M \Rightarrow D = \tfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \in U(f'(b),\,\varepsilon) \Rightarrow D < 0\,.$$

Pro tato $x < b$ je $f(x) > f(b)$, protože $x - b < 0$ a $D < 0$. Podobně pro tato $x > b$ je $f(x) < f(b)$. Vezmeme jakékoli

$$c \in P^+(b,\,\theta) \cap M \ \text{ a } \ d \in P^-(b,\,\theta) \cap M\,.$$

Prvky c a d existují, protože $b \in L^{\pm}(M)$. Tedy $c, d \in U(b,\delta) \cap M$ a $f(c) < f(b) < f(d)$. □

Úloha 7.1.8 *Funkce $f(x) = x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ má v* 0 *ostré globální minimum a v* 1 *ostré globální maximum a přitom má nenulové derivace $f'(0) = f'(1) = 1$. Není to v rozporu s větou?*

Předešlou větu vyřkneme ještě jednou ekvivalentně, obměnou implikace, v její známější podobě nutné podmínky existence lokálního extrému.

Věta 7.1.9 (NPELE) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M$ a nechť f má v b lokální extrém. Potom $b \notin L^{\pm}(M)$ nebo $f'(b)$ neexistuje nebo $f'(b) = 0$.*

Funkce $f \in \mathcal{R}$ tak může mít lokální, tedy i globální, extrémy jen v následující množině „podezřelých" bodů.

$$\underline{\mathrm{SUSP}}(f) = \{b \in M(f) :\ b \notin L^{\pm}(M) \vee \neg\,\exists\, f'(b) \vee f'(b) = 0\}\ \ (\subset M(f))\,.$$

• *Derivace a spojitost.* Diferencovatelnost funkce zesiluje bodovou spojitost.

Tvrzení 7.1.10 (derivace a spojitost) *Funkce $f \in \mathcal{R}$ je spojitá v každém bodu $b \in M(f)$, kde existuje vlastní derivace $f'(b)$.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathcal{R}$, $b \in M(f)$ a existuje $f'(b) \in \mathbb{R}$. Tedy $b \in L(M(f))$ a podle věty 5.3.3 se

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} \left(f(b) + (x-b)\cdot \tfrac{f(x)-f(b)}{x-b}\right) = f(b) + 0\cdot f'(b) = f(b)\,.$$

Podle tvrzení 5.2.4 je funkce f spojitá v b. □

Úloha 7.1.11 *Dokažte, že* $\mathrm{sgn}'(0) = +\infty$. *Existence nevlastní derivace tak neimplikuje spojitost funkce v daném bodě.*

Úloha 7.1.12 *Dokažte, že* $(|x|)'_-(0) = -1$ *a* $(|x|)'_+(0) = +1$. *Podle části 3 úlohy 7.1.4 tedy* $(|x|)'(0)$ *neexistuje. Spojitost v bodu tak samozřejmě nezaručuje existenci derivace.*

Nenulová derivace v bodu dává kromě věty 7.1.7 i následující výsledek, který se bude hodit pro derivování inverzní funkce.

Tvrzení 7.1.13 (limitní body oboru hodnot) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ a existuje nenulová vlastní derivace $f'(b)$. Pak $f(b) \in L(f[M])$.*

Důkaz. Nechť f a $b \in M \cap L(M)$ jsou, jak uvedeno, a je dáno ε. Díky $f'(b) \neq 0$ dle definice 7.1.1 existuje δ, že pro každé $x \in P(b,\delta) \cap M$ je $f(x) \neq f(b)$. Podle tvrzení 7.1.10 lze vzít ono δ tak malé, že pro tato x je také $f(x) \in U(f(b),\varepsilon)$. Protože $b \in L(M)$, lze vzít $a \in P(b,\delta) \cap M$. Pak $f(a) \in P(f(b),\varepsilon) \cap f[M]$. Tedy $f(b) \in L(f[M])$. □

Úloha 7.1.14 *Když se $f'(b) = \pm\infty$, pak toto tvrzení nemusí platit.*

Úloha 7.1.15 *Tvrzení platí i pro $f'(b) = 0$, pokud f není konstantní na žádném okolí $U(b,\delta) \cap M$.*

• *Příklady derivací.* Zderivujeme funkci $\sqrt{x}$, jež je v $\mathcal{F}([0, +\infty))$. Nechť $a \geq 0$. Pak

$$(\sqrt{x})'(a) = \lim_{x\to a} \tfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \tfrac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \tfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\,.$$

Pro $a > 0$ je $(\sqrt{x})'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ a $(\sqrt{x})'(0) = +\infty$. Nevlastní derivace je tedy slučitelná se spojitostí funkce v daném bodě.

Úloha 7.1.16 *Pro každé $a \geq 0$ spočítejte $(\sqrt{x})'_-(a)$ i $(\sqrt{x})'_+(a)$.*

Úloha 7.1.17 (derivace konstant) *Pro každé $c \in \mathbb{R}$ se $k'_c = k_0$.*

• *Derivace jako unární operace na $\mathcal{R}$.* Připomínáme, že $\mathcal{F}(M)$ s $M \subset \mathbb{R}$ je množina všech funkcí f typu $f\colon M \to \mathbb{R}$. Z bodových hodnot derivace funkce složíme novou funkci.

Definice 7.1.18 (derivace funkce) *Pro $f \in \mathcal{F}(M)$ nechť $\underline{D(f)} = \{b \in M : \exists\, f(b) \in \mathbb{R}\}$ $(\subset L(M) \cap M)$. Funkci $f' \in \mathcal{F}(D(f))$ s hodnotami $f'(b) = \frac{df}{dx}(b)$ nazveme derivací funkce f.*

Derivace může mít menší definiční obor než původní funkce. Například $M(\sqrt{x}) = [0, +\infty)$, ale $D(\sqrt{x}) = M((\sqrt{x})') = M(\frac{1}{2\sqrt{x}}) = (0, +\infty)$.

Úloha 7.1.19 *Pro každou funkci $f \in \mathcal{R}$ je zúžení $f \,|\, D(f)$ spojité.*

• *Funkce s nespojitou derivací.* Sestrojíme funkci $f \in \mathcal{R}$, že $f' \notin \mathcal{C}$. Nechť posloupnosti $a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \cdots > 0$ mají limitu $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $a_n - b_n = o(b_n)$ $(n \to \infty)$. Nechť $N = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(b_n, a_n)$ a nechť funkce $f \in \mathcal{F}(N)$ má hodnoty $f(0) = 0$ a $f(x) = x - b_n$ pro $x \in (b_n, a_n)$.

Tvrzení 7.1.20 (nespojitá derivace) *Pak je $f' \in \mathcal{F}(N)\backslash\mathcal{C}$, neboť $f'(0) = 0$, jinak $f'(x) = 1$ a $0 \in L(N)$.*

Důkaz. Pro $x \in (b_n, a_n)$ se $f'(x) = (x - b_n)' = 1$. Ale $0 \in L(N)$ a $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, neboť pro $x \in (b_n, a_n)$ je $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \frac{a_n - b_n}{b_n} \to 0$ $(n \to \infty)$. □

Úloha 7.1.21 *Proč se* $\lim \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$*?*

7.2 Standardní a limitní tečny

Definujeme tečnu ke grafu funkce $f \in \mathcal{R}$ v jeho bodu $(b, f(b))$. Graf funkce f je množina bodů v rovině $G_f = \{(x, f(x)) :\ x \in M(f)\}$ $(\subset \mathbb{R}^2)$. Podle naší definice funkce se f a G_f prakticky shodují.

• *Standardní tečny.* Ty už jsme zmínili v souvislosti s diferencovatelností funkce v bodu definičního oboru.

Definice 7.2.1 (standardní tečna) *Nechť funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ je diferencovatelná v $b \in M \cap L(M)$. Tečnou k jejímu grafu v bodě $(b, f(b))$ rozumíme přímku ℓ $(\subset \mathbb{R}^2)$ danou rovnicí $y = f'(b) \cdot (x - b) + f(b)$, $x \in \mathbb{R}$.*

Tečna má sklon $f'(b)$ $(\in \mathbb{R})$ a prochází bodem $(b, f(b))$.

Úloha 7.2.2 *f a b buďte jako v definici. Pak funkce $x \mapsto f'(b) \cdot (x - b) + f(b)$ je jediná lineární funkce aproximující f u b s přesností $o(x - b)$ $(x \to b)$.*

Úloha 7.2.3 *Napište rovnici tečny ke grafu funkce $\sqrt{x}$ v bodě $(a, \sqrt{a})$.*

O tečnách se často říká, že jsou nějakými limitami sečen, to jest přímek jdoucích dvěma body grafu. Nikdy se už ale neřekne, jakými vlastně. Pojďme to teď říci.

• *Nesvislé přímky.* Podle geometrie roviny každá nesvislá přímka ℓ má jednoznačné vyjádření $\ell = \{(x, sx+t) :\ x \in \mathbb{R}\}$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Číslo s nazveme jejím sklonem. Nechť $\mathcal{N}$ ($\subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$) je množina nesvislých přímek v rovině.

Úloha 7.2.4 *Funkce $p\colon \mathcal{N} \to \mathbb{R}^2$, daná jako $p(\ell) = (p_1(\ell), p_2(\ell)) = (s, t)$, je bijekce z množiny $\mathcal{N}$ nesvislých přímek do množiny $\mathbb{R}^2$.*

Definice 7.2.5 (limity v $\mathcal{N}$) *Pro $(\ell_n) \subset \mathcal{N}$ a $\ell \in \mathcal{N}$ píšeme $\lim \ell_n = \ell$, právě když $\lim p_1(\ell_n) = p_1(\ell)$ a $\lim p_2(\ell_n) = p_2(\ell)$.*

Úloha 7.2.6 *Nechť $A = (a, b)$ a $A' = (a', b')$ jsou v $\mathbb{R}^2$ & $a \neq a'$. Pak existuje jediná přímka $\ell \in \mathcal{N}$, že $A \in \ell$ i $A' \in \ell$. Tato přímka ℓ má sklon $\frac{b'-b}{a'-a}$.*

Přímku $\ell \in \mathcal{N}$ jdoucí body A a A' označíme jako $\kappa(A, A') = \kappa(a, b, a', b')$. Leží-li body A a A' na grafu funkce, mluvíme o ℓ jako o sečně tohoto grafu.

• *Limitní tečny.* Předkládáme rigorózní definici tečny ke grafu funkce v podobě limity posloupnosti sečen.

Definice 7.2.7 (limitní tečna) *Nechť je funkce $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M \cap L(M)$ a $\ell \in \mathcal{N}$. Pokud pro každou posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ s $\lim a_n = b$ platí ve smyslu definice 7.2.5, že*

$$\lim_{n\to\infty} \kappa(b,\, f(b),\, a_n,\, f(a_n)) = \ell\,,$$

nazveme přímku ℓ limitní tečnou ke G_f v bodu $(b, f(b))$.

V této definici tečny nepotřebujeme hodnotu derivace $f'(b)$.

Úloha 7.2.8 *Když ℓ je limitní tečna ke G_f v bodu $(b, f(b))$, pak $(b, f(b)) \in \ell$.*

Dokážeme, že pojmy standardní tečny a limitní tečny splývají.

Věta 7.2.9 (tečna $\iff$ lim. tečna) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$, $b \in M \cap L(M)$ a ℓ je v $\mathcal{N}$. Potom ℓ je tečna ke G_f v bodu $(b, f(b))$ ve smyslu definice 7.2.1 $\iff$ ℓ je limitní tečna ke G_f v bodu $(b, f(b))$ ve smyslu definice 7.2.7.*

Důkaz. Nechť f, M, b a ℓ jsou, jak uvedeno. Implikace $\Rightarrow$. Předpokládáme, že existuje $f'(b) \in \mathbb{R}$ a že ℓ je dána rovnicí

$$y = f'(b)\cdot(x-b) + f(b) = f'(b)\cdot x + f(b) - f'(b)f(b)\,.$$

Nechť $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ má $\lim a_n = b$. S $c_n = \frac{f(a_n)-f(b)}{a_n-b}$ je přímka $\kappa_n = \kappa(b, f(b), a_n, f(a_n))$ dána rovnicí

$$y = c_n(x-b) + f(b) = c_n x + f(b) - c_n b\,.$$

Podle Heineho definice derivace se $\lim c_n = f'(b)$. Tedy $\lim(f(b) - c_n b) = f(b) - f'(b)f(b)$ a $\lim \kappa_n = \ell$ ve smyslu definice 7.2.5.

Implikace $\Leftarrow$. Nechť ℓ je dána rovnicí $y = sx + t$ a nechť (a_n), c_n a κ_n jsou jako výše. Předpokládáme, že pro každou takovou posloupnost (a_n) se $\lim \kappa_n = \ell$ ve smyslu definice 7.2.5. Tedy vždy $\lim c_n = s$ a $\lim(f(b) - c_n b) = f(b) - sb = t$. Podle Heineho definice derivace se pak $s = f'(b)$. Takže $t = f(b) - f'(b)b$ a ℓ je tečna ke G_f v bodě $(b, f(b))$. $\square$

• *Tečna v chybějícím bodu.* Ukážeme, jak definovat tečnu ke grafu funkce v jeho bodu bez použití tohoto bodu. Důkaz následujícího lemmatu je jasný.

Lemma 7.2.10 (jedna konvexní kombinace) *Pro nezáporná reálná čísla r, s, t, v, kde $s, v > 0$, položíme $\alpha = \frac{s}{s+v}$ a $\beta = \frac{v}{s+v}$. Pak*

$$\frac{r+t}{s+v} = \alpha \cdot \frac{r}{s} + \beta \cdot \frac{t}{v}$$

je konvexní kombinace s koeficienty α a β, protože $\alpha, \beta \geq 0$ a $\alpha + \beta = 1$.

Věta 7.2.11 (tečna v chybějícím bodu) *Nechť $b \in M$ je* OLB *množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(M \setminus \{b\})$ a $\ell \in \mathcal{N}$. Potom platí ekvivalence, že funkci f lze rozšířit do b hodnotou $f(b)$ tak, že ℓ je tečna ke G_f v bodu $(b, f(b))$ $\iff$ pro každé dvě posloupnosti (x_n), $(y_n) \subset M$ splňující, že vždy $x_n < b < y_n$ a že $x_n, y_n \to b$, se $\lim \kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n)) = \ell$ ve smyslu definice 7.2.5.*

Důkaz. Nechť b, M, f a ℓ jsou, jak uvedeno. Implikace $\Rightarrow$. Předpokládáme, že jsme funkci f rozšířili do b nějakou hodnotou $f(b)$, existuje $f'(b) \in \mathbb{R}$ a přímka ℓ je dána rovnicí

$$y = f'(b) \cdot (x - b) + f(b) = f'(b) \cdot x + f(b) - f'(b)b\,.$$

Nechť (x_n) a (y_n) jsou popsané posloupnosti. Položíme $r_n = f(b) - f(x_n)$, $s_n = b - x_n$, $t_n = f(y_n) - f(b)$ a $v_n = y_n - b$. Podle lemmatu 7.2.10 je sklon u_n sečny

$$\ell_n = \kappa(x_n,\, f(x_n),\, y_n,\, f(y_n))$$

grafu G_f konvexní kombinací sklonů r_n/s_n a t_n/v_n sečen $\kappa(x_n, f(x_n), b, f(b))$ a $\kappa(b, f(b), y_n, f(y_n))$:

$$u_n = \tfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \tfrac{r_n + t_n}{s_n + v_n} = \alpha_n \cdot \tfrac{r_n}{s_n} + \beta_n \cdot \tfrac{t_n}{v_n}\,,$$

kde $\alpha_n, \beta_n \geq 0$ a $\alpha_n + \beta_n = 1$. Protože $\lim r_n/s_n = \lim t_n/v_n = f'(b)$, podle věty 3.3.10 též $\lim u_n = f'(b)$. Sečna ℓ_n je dána rovnicí

$$y = u_n(x - x_n) + f(x_n) = u_n x + f(x_n) - u_n x_n\,.$$

Protože $\lim u_n = f'(b)$, $\lim x_n = b$ a $\lim f(x_n) = f(b)$ (f je spojitá v b, protože $f'(b) \in \mathbb{R}$), je $\lim \ell_n = \ell$ ve smyslu definice 7.2.5.

Implikace $\neg \Rightarrow \neg$. Nechť f nelze rozšířit do b žádnou hodnotou $f(b)$ tak, aby ℓ byla tečna ke G_f v $(b, f(b))$. Když tedy vezmeme to jediné číslo $f(b) \in \mathbb{R}$, že $(b, f(b)) \in \ell$, a když $s \in \mathbb{R}$ je sklon přímky ℓ, pak neplatí, že $\lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = s$. Sestrojíme dvě posloupnosti $(x_n), (y_n) \subset M$ splňující, že vždy $x_n < b < y_n$ a že $x_n, y_n \to b$, ale že neplatí limita přímek $\lim \kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n)) = \ell$.

První případ je, že rozšířená funkce f není spojitá v b. Pak existují posloupnosti $(x_n), (y_n) \subset M$ splňující, že vždy $x_n < b < y_n$, že $\lim x_n = \lim y_n = b$, $\lim f(x_n) = K$, $\lim f(y_n) = L$, ale že neplatí $K = L = f(b)$ (úloha 7.2.12). Pokud $K \neq L$, sklony sečen $\ell_n = \kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n))$ jdou do $\pm\infty$, takže uvedená limita přímek neplatí. Pokud $K = L \neq f(b)$, pak průsečíky sečen ℓ_n se svislou přímkou $(x = b)$ konvergují k (případně nevlastnímu) bodu různému od $(b, f(b))$. Podle úlohy 7.2.13 pak limita $\lim \ell_n$, když existuje, nemůže být přímka jdoucí bodem $(b, f(b))$ a uvedená limita přímek opět neplatí.

Zbylý druhý případ je, že rozšířená funkce f je spojitá v b, ale neplatí rovnost $\lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = s$. Pak existuje $A \in \mathbb{R}^* \setminus \{s\}$ a posloupnost $(x_n) \subset M \setminus \{b\}$, která celá leží na jedné straně od b, že $\lim x_n = b$ a $\lim \frac{f(x_n)-f(b)}{x_n-b} = A$. Můžeme předpokládat, že vždy $x_n < b$, případ, že vždy $x_n > b$, je podobný. Vezmeme libovolnou posloupnost $(y_n) \subset M$, že vždy $y_n > b$ a $\lim y_n = b$. Pak $\lim f(y_n) = f(b)$ a z (y_n) dokážeme vybrat podposloupnost (y_{m_n}), že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)-f(y_{m_n})}{x_n-y_{m_n}} = A$$

(úloha 7.2.14). Protože $A \neq s$, uvedená limita přímek opět neplatí. $\square$

Tři následující úlohy jsou vlastně lemmata použitá v důkazu věty a čtvrtá úloha ukazuje nutnost předpokladu, že body x_n a y_n jsou oddělené bodem b.

Úloha 7.2.12 *Když $b \in M$ je* OLB *množiny $M \subset \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{F}(M)$ není spojitá v b, pak existují posloupnosti $(x_n), (y_n) \subset M \setminus \{b\}$, které z různých stran konvergují k b a existují pro ně limity $\lim f(x_n) = K$ a $\lim f(y_n) = L$, ale alespoň jedna z rovností $K = f(b)$ a $L = f(b)$ neplatí.*

Úloha 7.2.13 *Nechť $\ell_n, \ell \in \mathcal{N}$, $(b, c) \in \ell$, $\lim \ell_n = \ell$ a $(x = b) \cap \ell_n = \{(b, c_n)\}$. Pak $\lim c_n = c$.*

Úloha 7.2.14 *(x_n), (y_n), (z_n) a (u_n) buďte takové posloupnosti, že $\lim x_n = \lim z_n = b$, že vždy $x_n \neq b$, $\lim y_n = \lim u_n = c$ a $\lim \frac{y_n-c}{x_n-b} = A$. Pak existuje posloupnost $(m_n) \subset \mathbb{N}$, že $\lim \frac{y_n-u_{m_n}}{x_n-z_{m_n}} = A$.*

Úloha 7.2.15 *Podmínka ve větě 7.2.11, že vždy $x_n < b < y_n$, je podstatná. Uveďte příklad funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ s tečnou ℓ ke G_f v bodu $(b, f(b))$ a dvou posloupností $(x_n), (y_n) \subset M \setminus \{b\}$ splňujících, že vždy $x_n \neq y_n$ a že $\lim x_n = \lim y_n = b$, ale že neplatí rovnost $\lim \kappa(x_n, f(x_n), y_n, f(y_n)) = \ell$.*

7.3 Aritmetika derivací

Derivace $f \mapsto f'$ je unární operace na $\mathcal{R}$. Probereme její interakce s binárními operacemi $+$, $\cdot$ a $/$. Na interakce se skládáním a inverzy se podíváme v dalším oddílu. V bodových vzorcích zapojíme nevlastní hodnoty derivací. Globální vzorce pracují pouze s vlastními hodnotami derivací.

• *Součet.* Bodově i globálně zderivujeme součet dvou funkcí.

Tvrzení 7.3.1 (součet) *Nechť jsou $f, g \in \mathcal{R}$ a $M \equiv M(f) \cap M(g)$. Pak platí následující.*
1. *Když $f'(b) = K$, $g'(b) = L$, $b \in L(M)$ a $K + L$ není neurčitý výraz, potom $(f+g)'(b) = K + L$.*
2. *Funkce $(f' + g') \,|\, L(M)$ je restrikce funkce $(f+g)'$.*

Důkaz. 1. Nechť $K + L$ není neurčitý výraz a $h \equiv f + g$. Patrně $b \in L(M(h))$ a podle věty 5.3.3 se

$$h'(b) = \lim_{x\to b} \tfrac{h(x)-h(b)}{x-b} = \lim_{x\to b} \tfrac{f(x)-f(b)}{x-b} + \lim_{x\to b} \tfrac{g(x)-g(b)}{x-b} = K + L\,.$$

2. Nechť $h \equiv (f' + g') \,|\, L(M)$ a $c \in M(h)$. Pak $c \in D(f) \cap D(g) \cap L(M)$ a podle první části je $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c) = h(c)$. □

Ve druhé části je jasné, že inkluze $M((f' + g') \,|\, L(M)) \subset M((f+g)')$ může být ostrá. Vezměme například $f = |x|$ a $g = -|x|$ ($\in \mathcal{F}(\mathbb{R})$). Pak $M = L(M) = \mathbb{R}$ a $(f+g)' = k_0$, ale $(f' + g') \,|\, L(M)$ je $k_0 \,|\, (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Například pro funkce $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$, $g(x) = \sqrt{x}$ a $M = L(M) = [0, +\infty)$ první část tvrzení dává, že

$$(\mathrm{sgn}(x) + \sqrt{x})'(0) = \mathrm{sgn}'(0) + (\sqrt{x})'(0) = +\infty + (+\infty) = +\infty\,.$$

Úloha 7.3.2 $(\mathrm{sgn}(x) - \sqrt{x})'(0) =$*?*

• *Součin.* Odvodíme známý Leibnizův vzorec pro derivaci součinu, v bodovém i globálním tvaru.

Věta 7.3.3 (součin) *Nechť jsou $f, g \in \mathcal{R}$ a $M \equiv M(f) \cap M(g)$. Pak platí následující.*
1. *Když $f'(b) = K$, $g'(b) = L$, f nebo g je spojitá v b, $b \in L(M)$ a výraz $K \cdot g(b) + f(b) \cdot L$ je definovaný, pak $(fg)'(b) = K \cdot g(b) + f(b) \cdot L$.*
2. *Funkce $(f'g + fg') \,|\, L(M)$ je restrikce funkce $(fg)'$.*

Důkaz. 1. Nechť výraz $K \cdot g(b) + f(b) \cdot L$ je definovaný, $h \equiv fg$ a g je spojitá v b. Případ, kdy f je spojitá v b, je přenechán úloze 7.3.4. Tedy $b \in L(M(h))$,

$$h'(b) = \lim_{x\to b} \tfrac{f(x)g(x)-f(b)g(b)}{x-b} = \lim_{x\to b} \tfrac{(f(x)-f(b))g(x)+f(b)(g(x)-g(b))}{x-b}$$

a to se díky předpokladům a větě 5.3.3 rovná

$$\lim_{x\to b} \tfrac{f(x)-f(b)}{x-b} \cdot \lim_{x\to b} g(x) + f(b) \lim_{x\to b} \tfrac{g(x)-g(b)}{x-b} = Kg(b) + f(b)L\,.$$

2. Nechť $h \equiv (f'g + fg') \mid L(M)$ a $c \in M(h)$. Pak $c \in D(f) \cap D(g) \cap L(M)$, g je spojitá v c, protože $g'(c) \in \mathbb{R}$, a podle první části je $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c) = h(c)$. □

Inkluze $M((f'g + fg') \mid L(M)) \subset M((fg)')$ opět může být ostrá.

Úloha 7.3.4 *Vyřešte jednoduše případ, kdy je v b spojitá funkce f.*

Úloha 7.3.5 *Předpoklad bodové spojitosti jedné z funkcí nelze pominout. Nechť $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, kde pro $x \neq 0$ je $f(x) = -g(x) = \operatorname{sgn} x$ a pro $x = 0$ je $f(0) = -\frac{1}{2}$ a $g(0) = \frac{1}{2}$. Ukažte, že pak se pro $b = 0$ pravá strana Leibnizova vzorce rovná $(+\infty) \cdot \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \cdot (-\infty) = +\infty$, ale derivace $(fg)'(0)$ neexistuje.*

• *Podíl.* Odvodíme bodový i globální vzorec pro derivaci podílu.

Věta 7.3.6 (podíl) *Nechť jsou $f, g \in \mathcal{R}$ a $M \equiv M(f) \cap M(g) \setminus Z(g)$. Pak platí následující.*
1. Když $f'(b) = K$, $g'(b) = L$, g je spojitá v b, $b \in L(M)$ a výraz $(K \cdot g(b) - f(b) \cdot L)/g^2(b)$ je definovaný, pak $(f/g)'(b) = (K \cdot g(b) - f(b) \cdot L)/g(b)^2$.
2. Funkce $((f'g - fg')/g^2) \mid L(M)$ je restrikce funkce $(f/g)'$.

Důkaz. 1. Nechť výraz $(K \cdot g(b) - f(b) \cdot L)/g(b)^2$ je definovaný, $h \equiv f/g$ a g je spojitá v b. Tedy $b \in L(M(h))$,

$$h'(b) = \lim_{x \to b} \frac{f(x)/g(x) - f(b)/g(b)}{x - b} = \lim_{x \to b} \frac{f(x)g(b) - f(b)g(b) + f(b)g(b) - f(b)g(x)}{g(x)g(b)(x - b)}$$

a to se díky předpokladům a větě 5.3.3 rovná

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \lim_{x \to b} \frac{g(b)}{g(x)g(b)} - \lim_{x \to b} \frac{f(b)}{g(x)g(b)} \lim_{x \to b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b}$$
$$= \frac{f'(b)g(b) - f(b)g'(b)}{g(b)^2}\,.$$

2. Nechť $h \equiv ((f'g - fg')/g^2) \mid L(M)$ a $c \in M(h)$. Pak $c \in D(f) \cap D(g) \cap L(M) \setminus Z(g)$, g je spojitá v c, protože $g'(c) \in \mathbb{R}$, a podle první části je $(f/g)'(c) = (f'(c)g(c) - f(c)g'(c))/g(c)^2 = h(c)$. □

Inkluze $M(((f'g - fg')/g^2) \mid L(M)) \subset M((f/g)')$ opět může být ostrá.

Úloha 7.3.7 *Jako v úloze 7.3.5 uveďte příklad, který ukazuje, že předpoklad spojitosti g v b nelze vynechat.*

7.4 Derivace složených funkcí a inverzů

Připomínáme, že pro funkce $f, g \in \mathcal{R}$ je jejich složenina $f(g)$ funkce

$$f(g) \colon \{x \in M(g) :\ g(x) \in M(f)\} \to \mathbb{R}$$

s hodnotami $f(g)(x) = f(g(x))$. Tedy $M(f(g)) \subset M(g)$. Pro prostou funkci $f \in \mathcal{R}$ je její inverz f^{-1} funkce

$$f^{-1}\colon f[M(f)] \to \mathbb{R}$$

s hodnotami $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$. Tedy $M(f^{-1}) = f[M(f)]$. Když f není prostá, její inverz není definovaný.

- *Složená funkce.* Bodově i globálně zderivujeme složenou funkci.

Věta 7.4.1 (složenina) *Nechť jsou $f, g \in \mathcal{R}$ a $M \equiv M(f(g))$. <u>Pak</u> platí následující.*
1. Když $f'(g(b)) = K$, $g'(b) = L$, g je spojitá v b, $b \in L(M)$ a $K \cdot L$ není neurčitý výraz, pak $f(g)'(b) = K \cdot L$.
2. Funkce $(f'(g) \cdot g') \mid L(M)$ je restrikce funkce $f(g)'$.

Důkaz. 1. Nechť f, g, M a b jsou, jak uvedeno. Použijeme Heineho definici derivace. Nechť $f'(g(b)) \cdot g'(b)$ není neurčitý výraz a $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ je libovolná posloupnost s $\lim a_n = b$. Pak podle předpokladu $\lim g(a_n) = g(b)$. Posloupnost (a_n) rozložíme na dvě podposloupnosti (b_n) a (c_n), které mohou být konečné i prázdné, tak, že vždy je $g(b_n) = g(b)$ a $g(c_n) \neq g(b)$. Ukážeme, že pro $(x_n) = (b_n)$ i pro $(x_n) = (c_n)$, když (x_n) je nekonečná, máme tutéž limitu

$$\lim_{n\to\infty} \tfrac{f(g)(x_n)-f(g)(b)}{x_n-b} = f'(g(b)) \cdot g'(b)\,.$$

Pak i $\lim \frac{f(g)(a_n)-f(g)(b)}{a_n-b} = f'(g(b)) \cdot g'(b)$ a podle Heineho definice derivace se $f(g)'(b) = f'(g(b)) \cdot g'(b)$.

Nechť (b_n) je nekonečná. Pak $\lim b_n = b$ a podle Heineho definice derivace je $g'(b) = \lim \frac{g(b_n)-g(b)}{b_n-b} = \lim \frac{g(b)-g(b)}{b_n-b} = 0$. Tedy

$$\lim \tfrac{f(g)(b_n)-f(g)(b)}{b_n-b} = \lim \tfrac{f(g(b))-f(g(b))}{b_n-b} = 0 = f'(g(b)) \cdot g'(b)\,.$$

Nechť (c_n) je nekonečná. Pak $\lim c_n = b$, $\lim g(c_n) = g(b)$ a podle věty 5.3.3 a Heineho definice derivace se opět $\lim \frac{f(g)(c_n)-f(g)(b)}{c_n-b} = \lim \frac{f(g(c_n))-f(g(b))}{c_n-b}$ rovná

$$\lim \left(\tfrac{f(g(c_n))-f(g(b))}{g(c_n)-g(b)} \cdot \tfrac{g(c_n)-g(b)}{c_n-b}\right) = \lim \tfrac{f(g(c_n))-f(g(b))}{g(c_n)-g(b)} \cdot \lim \tfrac{g(c_n)-g(b)}{c_n-b}\,,$$

což podle Heineho definice derivace je $f'(g(b)) \cdot g'(b)$.

2. Nechť $h \equiv (f'(g) \cdot g') \mid L(M)$ a $c \in M(h)$. Pak $c \in M(f'(g)) \cap D(g) \cap L(M)$, g je spojitá v c, protože $g'(c) \in \mathbb{R}$, a podle první části je $(f(g))'(c) = f'(g(c)) \cdot g'(c) = h(c)$. $\square$

Inkluze $M((f'(g) \cdot g') \mid L(M)) \subset M(f(g)')$ opět může být ostrá.

Úloha 7.4.2 *Bez spojitosti funkce g v b první část věty nemusí platit.*

• *Inverz.* Bodově i globálně zderivujeme inverz, dva vzorce ale rozdělíme mezi větu a její důsledek. Funkce $f \in \mathcal{F}(M)$ <u>roste</u>, resp. <u>klesá</u>, v bodě $b \in M$, existuje-li δ, že pro každé x a x' s $b - \delta < x < b < x' < b + \delta$ je $f(x) < f(b) < f(x')$, resp. $f(x) > f(b) > f(x')$.

Věta 7.4.3 (inverz) *Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$ je prostá funkce, existuje derivace $f'(b)$ ($\in \mathbb{R}^*$) a inverz f^{-1} je spojitý v bodě $c \equiv f(b)$. <u>Pak</u> platí následující.*
1. Když $f'(b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $\big(f^{-1}\big)'(c) = 1/f'(b) = 1/f'(f^{-1}(c))$.
2. Když $f'(b) = 0$ a funkce f v bodě b roste, resp. klesá, pak $\big(f^{-1}\big)'(c) = +\infty$, resp. $-\infty$.
3. Když $f'(b) = \pm\infty$ a $c \in L(f[M])$, pak $\big(f^{-1}\big)'(c) = 0$.

Důkaz. Nechť f, M, b a c jsou, jak uvedeno. Opět použijeme Heineho definici derivace. Pro libovolnou posloupnost $(b_n) \subset f[M] \setminus \{c\}$ s $\lim b_n = c$ označíme $a_n = f^{-1}(b_n)$. Tedy $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$ a podle předpokladu $\lim a_n = b$.

1. Nechť $f'(b) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak $c \in L(f[M])$ podle tvrzení 7.1.13. Podle věty 5.3.3 a Heineho definice derivace je

$$\lim \tfrac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(c)}{b_n - c} = \lim \tfrac{1}{\frac{f(a_n) - f(b)}{a_n - b}} = \tfrac{1}{\lim \frac{f(a_n) - f(b)}{a_n - b}} = \tfrac{1}{f'(b)}\,.$$

Podle Heineho definice derivace se $(f^{-1})'(c) = 1/f'(b)$.

2. Nechť $f'(b) = 0$. Pak $c \in L(f[M])$ podle úlohy 7.1.15. Nechť f klesá (resp. roste) v b. Pak existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{f(a_n) - f(b)}{a_n - b} < 0$ (resp. $\dots > 0$). Předešlý výpočet a část 5 tvrzení 3.1.4 ukazují, že $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ (resp. $\dots = +\infty$).

3. Nechť $f'(b) = \pm\infty$ a $c \in L(f[M])$. Potom máme $(f^{-1})'(c) = \frac{1}{\pm\infty} = 0$ podle části 1. □

Úloha 7.4.4 *Co se stane, když se vynechá předpoklad spojitosti inverzu v c?*

Důsledek 7.4.5 (globálně) *Nechť $f \in \mathcal{R}$ je prostá a $M \equiv \{x \in f[M(f)] : f^{-1}$ je spojitá v $x\}$. <u>Pak</u> funkce $(k_1/f'(f^{-1}))\,|\,M$ je restrikce funkce $(f^{-1})'$.*

Důkaz. Nechť $h \equiv (k_1/f'(f^{-1}))\,|\,M$ a $c \in M(h)$. Pak $c \in M(f'(f^{-1})) \cap M \setminus Z(f'(f^{-1}))$, f^{-1} je spojitá v c, protože $c \in M$, a podle první části věty 7.4.3 je $(f^{-1})'(c) = 1/f'(f^{-1}(c)) = h(c)$. □

Inkluze $M((k_1/f'(f^{-1}))\,|\,M) \subset M((f^{-1})')$ opět může být ostrá.

7.5 Derivace Základních elementárních funkcí

Zderivujeme funkce ve třídě ZEF zavedené definicí 4.3.1.

• *Exponenciála, sinus a kosinus.* Pro zderivování těchto funkcí potřebujeme umět zderivovat mocninné řady.

Věta 7.5.1 (derivace MŘ) *Nechť posloupnost* $(a_0, a_1, \dots) \subset \mathbb{R}$ *splňuje, že* $\lim |a_n|^{1/n} = 0$. *Pak pro každé číslo* $x \in \mathbb{R}$ *je* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *abskon řada a* $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \equiv T(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Důkaz. Nechť a_n, S a T jsou, jak uvedeno, a $x, c \in \mathbb{R}$ s $c \neq 0$. Z věty 6.6.3 víme, že $S, T \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ($\lim(n+1)^{1/n} = 1$). Odhadneme $U = \left|\frac{1}{c}(S(x+c) - S(x)) - T(x)\right|$: $U \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}| \cdot |\sum_{j=0}^{n}(x+c)^j x^{n-j} - (n+1)x^n|$, což s $y = |c| + |x|$ je

$$\begin{aligned}
&\le |c| \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}| \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} y^{i-1} y^{n-i} \\
&\le |c| \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}| \cdot y^{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} 2^j \le |c| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}| \cdot (2y)^{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Pro $c \to 0$ to jde k 0. Tedy $S'(x) = \lim_{c \to 0} \frac{S(x+c) - S(x)}{c} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = T(x)$. □

Úloha 7.5.2 *Zdůvodněte odhady veličiny* U *v důkazu.*

Důsledek 7.5.3 ($\exp x$, $\cos x$ a $\sin x$) *Je* $(\exp x)' = \exp x$, $(\cos x)' = -\sin x$ *a* $(\sin x)' = \cos x$.

Důkaz. Podle předešlé věty máme, že

$$\begin{aligned}
(\exp x)' &= \big(\textstyle\sum_{n\ge 0} x^n/n!\big)' = \sum_{n \ge 0} \frac{(n+1)x^n}{(n+1)!} = \exp x\,, \\
(\cos x)' &= \big(\textstyle\sum_{n\ge 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\big)' = \sum_{n \ge 0} (-1)^{n+1} \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(2n+2)!} = -\sin x \ \text{ a} \\
(\sin x)' &= \big(\textstyle\sum_{n\ge 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\big)' = \sum_{n \ge 0} (-1)^{n} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \cos x\,.
\end{aligned}$$

□

Odvodíme derivace ostatních funkcí v ZEF. Ohledně konstant je jasné (nakonec i z úlohy 7.1.17), že pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $k_c' = k_0$.

• *Logaritmus.* Dokážeme, že $(\log x)' = \frac{1}{x} \mid (0, +\infty)$. Podle důsledku 7.4.5, užitého s $f = \exp x$ a $M = M(\log x) = (0, +\infty)$, je funkce

$$\frac{1}{\exp'(\log x)} \,\Big|\, M = \frac{1}{\exp(\log x)} \,\Big|\, M = \big(\tfrac{1}{x} \mid (0, +\infty)\big) \,\Big|\, M = \tfrac{1}{x} \mid (0, +\infty)$$

restrikcí funkce $(\log x)'$. Ale $M((\log x)') \subset M(\log x) = (0, +\infty)$, takže $(\log x)' = \frac{1}{x} \mid (0, +\infty)$. Odtud také vidíme, že $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$ $(\in \mathcal{F}(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$.

• *Reálná mocnina.*

Úloha 7.5.4 *Odvoďte následující derivace.* 1. *Pro* $a > 0$ *se* $(a^x)' = a^x \cdot \log a$. 2. *Pro* $b \neq 1$ *se* $(x^b)' = bx^{b-1}$. 3. *Pro* $b = 1$ *se* $(x^b)' = k_1 \mid [0, +\infty)$. 4. $(0^x)' = k_0 \mid (0, +\infty)$. 5. *Pro* $m \in \mathbb{Z}$ *s* $m \neq 0$ *se* $(x^m)' = mx^{m-1}$. 6. *Pro* $m = 0$ *se* $(x^m)' = k_0$.

• *Tangens a kotangens.*

Úloha 7.5.5 *Odvoďte derivace* $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$ *a* $(\cot x)' = -1/\sin^2 x$*.*

- *Inverzní trigonometrické funkce.*

Úloha 7.5.6 *Odvoďte derivace* $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ *a* $(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

- *Vzorce pro derivace funkcí v* ZEF *shrneme podle definičních oborů.*

1. <u>Obor $\mathbb{R}$</u>. Zde se $(\exp x)' = \exp x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ a $(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. Pro $m \in \mathbb{N}$ se $(x^m)' = mx^{m-1}$, pro $m = 0$ se $(x^m)' = k_0$ a pro $c \in \mathbb{R}$ se $(k_c(x))' = k_0(x)$.
2. <u>Obor $\mathbb{R} \setminus \{0\}$</u>. Zde se pro $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, derivace $(x^m)' = mx^{m-1}$ a $(\log |x|)' = \frac{1}{x}$.
3. <u>Obor $[0, +\infty)$</u>. Zde se pro $b > 1$ derivace $(x^b)' = bx^{b-1}$ a pro $b = 1$ se $(x^b)' = k_1 \mid [0, +\infty)$.
4. <u>Obor $(0, +\infty)$</u>. Zde se pro $b < 1$ derivace $(x^b)' = bx^{b-1}$ a $(\log x)' = \frac{1}{x} \mid (0, +\infty)$.
5. <u>Obor $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 :\ k \in \mathbb{Z}\}$</u>. Zde se $(\tan x)' = 1/(\cos x)^2$.
6. <u>Obor $\mathbb{R} \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$</u>. Zde se $(\cot x)' = -1/(\sin x)^2$.
7. <u>Obor $(-1, 1)$</u>. Zde se $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (zde se $\sqrt{x} \equiv x^{1/2}$).

Přednášku zakončíme druhým příkladem nespojité derivace, která tentokrát bude všude definovaná. První příklad jsme uvedli v tvrzení 7.1.20.

Úloha 7.5.7 $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *buď dána jako* $f = x^2 \sin(1/x) \cup \{(0, 0)\}$*. Řečeno postaru,* $f(0) = 0$ *a* $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ *pro* $x \neq 0$*. Dokažte, že* $D(f) = \mathbb{R}$*, ale že* $f' \notin \mathcal{C}$*.*

Zde tedy $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot \sin(k_1/\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \cup \{(0, 0)\}$.

Příloha A

Řešení úloh

Otazník místo návodu k řešení znamená, že řešení není autorovi učebnice známo.

Úloha 1.1.1 Nechť $(a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ má položky $a_{i,j} \geq 0$. Ukážeme, že celkový součet po řádcích $R = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$ se rovná supremu

$$A = \sup \left(\{ \textstyle\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} \mid I \subset \mathbb{N}^2 \text{ je konečná} \} \right) ,$$

branému v $(\mathbb{R}^*, <)$. Tato rovnost platí stejně pro celkový součet po sloupcích. Zřejmě $A \leq R$. Nechť $c < R$ je libovolné. Pak existuje m, že $c < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}$. Podobně nahlédneme, že pak existují $n_1, \dots, n_m$ v $\mathbb{N}$, že stále $c < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{i,j}$. Tedy $R \leq A$ a $R = A$.

Úloha 1.2.1 alfa, beta, velká gama, gama, velká delta, delta, epsilon, zéta, éta, velká théta, théta, varthéta, ióta, kappa, velká lambda, lambda, mí, ný, velké ksí, ksí, omikron, velké pí, pí, ró, velké sigma, sigma, tau, velké ypsilon, ypsilon, velké fí, fí, varfí, chí, velké psí, psí, velká omega, omega. Neuvedené kapitálky se shodují s latinkou, např. A pro α, H pro η apod.

Úloha 1.2.2 Nalevo je N, právě když φ je P, ale ψ je N. Což je totéž, jako že $\neg\psi$ je P a $\neg\varphi$ je N, což je ekvivalentní neplatnosti pravé strany.

Úloha 1.2.3 Když neexistuje individuum a v oboru formy $\varphi(x)$, aby platil výrok $\varphi(a)$, znamená to, že pro každé individuum a z tohoto oboru výrok $\varphi(a)$ neplatí a platí výrok $\neg\varphi(a)$. Podobně se dokáže druhá tautologie.

Úloha 1.2.5 Odpověď záleží na tom, jaké rovnosti mezi prvky této množiny nastávají. Jsou-li všechny různé, má M pět různých prvků. Pokud $a = b = 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ a pokud $a \neq \{a\}$, což axiom fundovanosti zaručuje, má M jen dva různé prvky.

Úloha 1.2.7 Prázdné množině $\emptyset$.

Úloha 1.2.9 $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} :\ n > 1 \wedge \forall\, l, m \in \mathbb{N} \left(lm = n \Rightarrow (l = 1 \vee m = 1) \right) \}$.

Úloha 1.2.10 Pokud $M \in M$, pak $M \notin M$. Pokud $M \notin M$, pak $M \in M$.

Úloha 1.2.11 $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi) \iff (\varphi \iff \psi)$ je tautologie.

Úloha 1.2.12 To hned plyne z axiomu extenzionality. A a B jsou podle definice disjunktní, právě když nemají společný prvek, tedy právě když je jejich průnik prázdná množina.

Úloha 1.2.13 Průnik prázdné množiny A není definovaný. $\forall b \in A\,\big(x \in b\big)$ vlastně znamená $\forall b\,\big(b \in A \Rightarrow x \in b\big)$. Pro prázdnou množinu A tato implikace platí vždy, pro libovolné x, protože její předpoklad není nikdy splněn. Průnik prázdné množiny by tedy měla být množina všech množin. Víme, že tento koncept vede ke sporu.

Úloha 1.2.14 Ne, tato rovnost rozhodně vždy neplatí. Jsou-li například A a B disjunktní, pak $|A \setminus B| = |A|$.

Úloha 1.2.15 $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ a $|\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})| = 2^n$.

Úloha 1.2.17 Platí-li pravá strana ekvivalence, platí i levá díky axiomu extenzionality. Nechť $X = (A, B) = (C, D)$. Podle definice dvojice je X buď jednoprvková množina, jejíž jediný prvek je jednoprvková množina $\{Y\}$ (složky dvojice se rovnají), anebo X je dvouprvková množina, jejíž jeden prvek je jednoprvková množina $\{Y\}$ a druhý je dvouprvková množina $\{Y, Z\}$ (složky dvojice jsou různé). Použijeme opakovaně axiom extenzionality. V prvním případu se $Y = A = B = C = D$. Ve druhém se $Y = A = C$, tudíž se $Z = B = D$.

Úloha 1.2.19 Plyne to z axiomu extenzionality, z předešlé úlohy a z toho, že každá uspořádaná k-tice A má $|A| = k$ prvků.

Úloha 1.3.4 Implikace $\Leftarrow$ je triviální. Nechť jsou funkce (A, B, f) a (C, D, g) shodné, takže $f = g$ a f je funkcionální relace mezi A a B i mezi C a D. Pro libovolný prvek $a \in A$ pro nějaký $b \in B$ je $(a, b) \in f$. Ovšem také $(a, b) \in C \times D$, takže $a \in C$ a $A \subset C$. Úplně stejně je $C \subset A$ a $A = C$.

Úloha 1.3.5 Ani jedna rovnost obecně neplatí.

Úloha 1.3.6 Právě když $X = Y$.

Úloha 1.3.7 Pro prostotu, konstantnost a identičnost to je pravda, pro surjektivitu a bijektivnost ne.

Úloha 1.3.8 Obě značení se mohou objevit současně, jen když funkce f je injekce, a pak souhlasí.

Úloha 1.3.9 Protože $f^{-1}\colon f[X] \to X$ je bijekce, máme $(f^{-1})^{-1}\colon X \to f[X]$, takže pro $f[X] \neq Y$ se $(f^{-1})^{-1}$ a f množinově liší. Jsou ale vždy shodné. Ovšem platí, že $((f^{-1})^{-1})^{-1}\colon f[X] \to X$, takže $((f^{-1})^{-1})^{-1}$ a f^{-1} se množinově rovnají.

Úloha 1.3.10 Je to pravda.

Úloha 1.3.11 Nechť f a g jsou injekce a $f(g)(x) = f(g)(y)$. Tedy $f(g(x)) = f(g(y))$ a $g(x) = g(y)$. Tedy $x = y$ a $f(g)$ je injekce. Nechť $g\colon X \to Y$ a $f\colon Y \to B$ jsou surjekce a $b \in B$. Protože f je surjekce, existuje $y \in Y$, že $f(y) = b$. Protože g je surjekce, existuje $x \in X$, že $g(x) = y$. Tedy $f(g)(x) = f(g(x)) = f(y) = b$ a $f(g)$ je surjekce. Jsou-li $g\colon X \to Y$ a $f\colon A \to B$ neprázdné surjekce a, například, $Y \cap A = \emptyset$, pak $f(g)\colon \emptyset \to B$ není surjekce.

Úloha 1.3.12 Obor hodnot funkce $f(g(h))$ vlevo i funkce $f(g)(h)$ vpravo se rovná oboru hodnot Y funkce f. Stačí tedy dokázat, že $f(g(h)) = f(g)(h)$ jako množiny. Což platí, obě množiny se rovnají množině těch dvojic $(x, y) \in M(h) \times Y$, že existují $a \in M(g)$ & $b \in M(f)$, že $h(x) = a$, $g(a) = b$ a $f(b) = y$.

Úloha 1.3.13 Vezmeme $Y = h[X]$, $g(x) = h(x)$ a $f = \mathrm{id}_Y$.

Úloha 1.3.14 Když f je bijekce, pak inverz $g = f^{-1}$ má požadované vlastnosti. Nechť naopak zobrazení $g\colon Y \to X$ je, jak uvedeno. Protože $g(f)(x) = x$, funkce f je prostá. Protože $M(f(g)) = Y$, funkce f je na.

Úloha 1.3.15 Právě když definiční obor je prázdná nebo jednoprvková množina.

Úloha 1.3.18 Nechť R je relace ekvivalence na $A \neq \emptyset$ (pro prázdnou A vše platí triviálně) a $[a]_R$ je blok ekvivalence. Patrně $a \in [a]_R$, takže prvky v A/R jsou neprázdné a $\bigcup A/R = A$. Nechť $a, b \in A$, $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$ a $c \in [a]_R$. Existuje tedy prvek $d \in [a]_R \cap [b]_R$. Z cRa, aRd a dRb tranzitivitou R plyne, že cRb a tedy $c \in [b]_R$. Takže $[a]_R \subset [b]_R$. Opačná inkluze se ukáže stejně, takže $[a]_R = [b]_R$. Prvky v A/R jsou tedy vzájemně disjunktní.

Pokud $b, c \in [a]_R$, pak bRa a cRa, takže (R je relace ekvivalence) i bRc. Pokud bRc, $b \in [a]_R$ a $c \in [a']_R$, pak bRa, cRa', takže aRa'. Tedy $[a]_R = [a']_R$ a b, c leží ve společném bloku.

Úloha 1.3.19 Nechť X je rozklad množiny $Y \neq \emptyset$ a $R = Y/X$. Pro $y \in Y$ vezmeme blok $Z \in X$ s $y \in Z$. Tedy yRy a R je reflexivní. Pro $y, y' \in Y$ s yRy' existuje blok $Z \in X$, že $y, y' \in Z$. Tedy i $y'Ry$ a R je symetrická. Nechť $y, y', y'' \in Y$ s yRy' a $y'Ry''$. Existují tedy bloky $Z, Z' \in X$, že $y, y' \in Z$ a $y', y'' \in Z'$. Pak ale $Z \cap Z' \neq \emptyset$ a tedy $Z = Z'$. Takže i yRy'' a R je tranzitivní.

Podle definice je jasné, že $x, y \in Z \in X$, právě když $x(Y/X)y$.

Úloha 1.3.20 Nechť R, $A \neq \emptyset$ a B jsou, jak je uvedeno. Dokážeme první rovnost. Víme, že $C = A/R$ je rozklad množiny A, tedy $S = A/C$ je relace ekvivalence na A. Ukážeme, že $S = R$. Nechť $a, b \in A$. Pak aSb, právě když existuje blok $D \in C$, že $a, b \in D$. Jak víme z úlohy 1.3.18, a, b leží ve společném bloku rozkladu C, právě když aRb. Tedy $S = R$.

Dokážeme druhou rovnost. Víme, že $S = A/B$ je relace ekvivalence na A, tedy $C = A/S$ je rozklad množiny A. Ukážeme, že $C = B$. Opět $a, b \in A$ leží společně v nějakém jeho bloku, právě když aSc. Což ale nastává, právě když a, b leží společně v nějakém bloku rozkladu B. Tedy $C = B$.

Úloha 1.4.2 Vždy $a \leq a$, protože $a = a$. Tranzitivita $\leq$ plyne z tranzitivity $<$ a totéž platí pro trichotomii.

Úloha 1.4.3 Současně neplatí ani $a < b$ a $a = b$, ani $b < a$ a $a = b$, protože $<$ je ireflexivní. Nelze ani $a < b$ a $b < a$, protože pak tranzitivita $<$ dává opět spor s ireflexivitou.

Úloha 1.4.4. Když m a n jsou dvě maxima množiny B, je $n \leq m$ i $m \leq n$, takže $m = n$. Podobně pro minima.

Úloha 1.4.5 Nechť $(A, <)$ je lineární uspořádání a $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, je neprázdná konečná množina. Pro $i = 1, 2, \dots, n$ prvek b_i postupně porovnáváme v $<$ pomocí trichotomie s předchozími prvky $b_1, \dots, b_{i-1}$. Dostaneme tak nějakou permutaci π množiny $[n]$, v níž $b_{\pi(1)} < b_{\pi(2)} < \cdots < b_{\pi(n)}$. Pak $b_{\pi(1)} = \min(B)$ a $b_{\pi(n)} = \max(B)$.

Úloha 1.4.7 Plyne to hned z jednoznačnosti maxim a minim.

Úloha 1.4.8 Nechť $c = \sup(B)$. Pak c je horní mez B. Nechť $a < c$. Protože c je nejmenší horní mez B, prvek a už není horní mez B a existuje uvedené b. Naopak mějme c uvedenými vlastnostmi. Říkají vlastně, že c je nejmenší horní mez množiny B, takže $c = \sup(B)$.

Podobně se dokáže ekvivalence, že $c \in A$ je infimum množiny B, právě když $c \leq b$ pro každé $b \in B$ a pro každé $a \in A$ s $c < a$ existuje $b \in B$, že $b < a$.

Úloha 1.5.1 Reflexivita i symetrie jsou jasné. Dokážeme tranzitivitu. Nechť $a/b \sim c/d$ a $c/d \sim e/f$. Tedy $ad = bc$ a $cf = de$. Pak ale $adf = bcf = bde$, tedy $adf = bde$. Nenulové d lze zkrátit ($\mathbb{Z}$ je obor integrity) a $af = be$, tedy $a/b \sim e/f$.

Úloha 1.5.3 Nechť $\alpha \in \mathbb{Q}$. Protozlomek $p_\alpha \in \alpha$ dostaneme zkrácením libovolného protozlomku $\frac{m}{n} \in \alpha$ do základního tvaru. Tato funkce $\alpha \mapsto p_\alpha$ je hledaná bijekce. Je jednoznačná, protože dva různé prvky v Z_z jsou neekvivalentní v relaci $\sim$. Dokážeme to. Když $\frac{k}{l}, \frac{m}{n} \in Z_z$ jsou v základním tvaru a $\frac{k}{l} \sim \frac{m}{n}$, pak $kn = ml$. Každá mocnina prvočísla dělící k tedy dělí m a naopak. Podle Základní věty aritmetiky se $k = m$ a tedy i $l = n$.

Úloha 1.5.5 Když 0_X a $0'_X$ jsou dva aditivní neutrální prvky, pak díky komutativitě sčítání je $0_X = 0_X + 0'_X = 0'_X + 0_X = 0'_X$. Podobně pro násobení. Když $\alpha + \beta = 0_X$ a $\alpha + \gamma = 0_X$, pak díky asociativitě a komutativitě sčítání se $\gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \gamma) + \beta = \beta$. Podobně pro multiplikativní inverzy.

Úloha 1.5.6 Vezmeme sčítání a násobení v $\mathbb{Z}$ modulo 2: $0 + 0 = 1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 \cdot 1 = 1$ a $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$. Je to konečný obor integrity, takže těleso.

Úloha 1.5.8 V každém okruhu R_{O} platí rovnost $0_R x = 0_R$. Plyne přičtením $-(0_R x)$ k rovnosti $0_R x = (0_R + 0_R)x = 0_R x + 0_R x$ získané distributivitou a neutralitou 0_R. Tudíž $-x = (-1_R)x$. Položíme $x - y = x + (-y)$. Pak $(x + y)(x - y) = (x + y)(x + (-1_R)y) = x^2 + (-1_R)xy + xy + (-1_R)y^2 = x^2 - y^2$. Tedy $(-x)^2 = x^2$, protože $0_R = (x + (-x))(x - (-x)) = x^2 - (-x)^2$. Kdyby v uspořádaném tělese T_{UT} bylo $1_T < 0_T$, přičtením -1_T dostaneme $0_T < -1_T$. Druhý axiom uspořádání pak dává $0_T < (-1_T)^2 = 1_T^2 = 1_T$. Tedy vždy $0_T < 1_T$. Přičítáním 1_T dostáváme, že $0_T < 1_T < 1_T + 1_T < 1_T + 1_T + 1_T < \dots$. Tedy T je nekonečné.

Úloha 1.5.10 $0 \cdot 1 \neq 1 \cdot 1$.

Úloha 1.5.12 Nechť $(A, <)$ je lineární uspořádání. Pak $\sup(\emptyset) = \min(H(\emptyset)) = \min(A)$, když toto minimum existuje. Pro shora neomezenou podmnožinu B není $\sup(B)$ definováno, protože $H(B) = \emptyset$.

Úloha 1.5.13 Funkce $a \mapsto -a$ převádí infima na suprema.

Úloha 1.5.14 T_{UT} buď úplné uspořádané těleso. Uvážíme podmnožinu $\mathbb{N}_T = \{1_T + 1_T + \dots + 1_T \mid n \in \mathbb{N}$ sčítanců$\}$. Stačí ukázat, že $\mathbb{N}_T$ není shora omezená. Kdyby byla, položíme $s = \sup(\mathbb{N}_T)$. Podle definice suprema existuje $x \in \mathbb{N}_T$, že $s - 1_T < x \leq s$. Pak ale $s < x + 1_T \in \mathbb{N}_T$, což je spor.

Úloha 1.5.17 Z $b \geq a$ by vynásobením číslem $2b$ plynulo, že $2b^2 \geq 2ba > a^2$, ve sporu s rovností $a^2 = 2b^2$. Když $a \in \mathbb{N}$ je sudé (resp. liché), pak $a = 2c$ (resp. $a = 2c - 1$) pro nějaké $c \in \mathbb{N}$ a $a^2 = (2c)^2 = 2 \cdot 2c^2$ (resp. $a^2 = (2c - 1)^2 = 2 \cdot (2c^2 - 2c + 1) - 1$) je sudé (resp. liché). Když $a \in \mathbb{Z}$ a $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ splňují rovnost $a^2 = 2b^2$, pak i $a \neq 0$ a $(\pm a)^2 = 2(\pm b)^2$.

Úloha 1.5.19 Pro zlomky $s, r > 0$ s $s^2 > 2$ nerovnost $(s - r)^2 > 2$ platí, pokud $s^2 - 2 > 2sr - r^2$, tedy např. pro každé kladné $r < (s^2 - 2)/2s$. Pro zlomky r, s s $s^2 < 2$, $s > 0$ a $r \in (0, 1)$ (pak $r^2 < r$) nerovnost $(s + r)^2 < 2$ platí, pokud $2sr + r^2 < 2 - s^2$, tedy např. pro každé kladné $r < \min(1, (2 - s^2)/(2s + 1))$.

Úloha 1.6.1 Reflexivita a symetrie relace $\sim$ jsou triviální. Tranzitivita snadno plyne pomocí trojúhelníkové nerovnosti.

Úloha 1.6.2 Stačí dokázat, že když posloupnosti (a_n) a (b_n) v C jsou shodné podle definice, pak splňují i tuto formálně silnější podmínku. Nechť tedy $|a_n - b_n| \le 1/2k$ pro každé velké n. Protože (a_n) je Cauchyova, pro každé velké m a n platí, že $|a_m - a_n| \le 1/2k$. Podle trojúhelníkové nerovnosti pro každé velké m a n je $|a_m - b_n| \le |a_m - a_n| + |a_n - b_n| \le 1/2k + 1/2k = 1/k$.

Úloha 1.6.10 Snadno se ověří, že pro každé dva zlomky a a b platí, že $f(a - b) = f(a) - f(b)$, $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ a že $a < b$, právě když $f(a) < f(b)$.

Úloha 1.6.11 Pro $z = 0$ nerovnost $x < y$ přejde v rovnost $xz = 0 = 0 = yz$.

Úloha 1.6.13 Když $a_1 \le a_2 \le \cdots \le b$ jsou zlomky, pak (a_n) je Cauchyova posloupnost. Důkaz je stejný.

Úloha 1.7.2 Nechť X je neprázdná konečná množina (pro prázdnou to platí triviálně s prázdným zobrazením f). Axiomem výběru postupně vybíráme prvky $f(1) \in X$, $f(2) \in X \setminus \{f(1)\}$, $f(3) \in X \setminus \{f(1), f(2)\}$, $\dots$ dokud to jde, to jest dokud zbývající množina je neprázdná. Protože X je konečná množina, nepodaří se nám v f sestrojit injekci z $\mathbb{N}$ do X. V jistém kroku $m \in \mathbb{N}$ vyčerpáme prvky v X a dostaneme bijekci $f\colon [m] \to X$. Hodnoty $f(n) \in X$ pro $n > m$ doplníme libovolně.

Úloha 1.7.3 Tuto bijekci jsme nalezli v předešlém důkazu.

Úloha 1.7.6 Funkce $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ daná jako $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = -1$, $f(4) = 2$, $f(5) = -2$, $f(6) = 3$, $\dots$ je bijekce.

Úloha 1.7.8 $Y = \emptyset$.

Úloha 1.7.9 Nechť $f\colon \mathcal{P}(X) \to X$ je injekce. Pak máme inverz $f^{-1}\colon f[\mathcal{P}(X)] \to \mathcal{P}(X)$ a definujeme množinu $Y = \{x \in f[\mathcal{P}(X)] \mid x \notin f^{-1}(x)\}$ $(\subset X)$. Pro prvek $y = f(Y)$ dostaneme z $y \overset{?}{\in} Y$ známý spor.

Úloha 1.7.12 Je to celkem jasné.

Úloha 1.7.15 Tyto dvojice (různé od kladné a záporné nuly) jsou jednoznačně určené ciframi před maximálním úsekem devítek.

Úloha 1.7.18 Hodnoty funkce f mimo Y přesměrujeme do Y a tím dostaneme f_0. Bijekce g je jasná. Funkce h je surjekce, protože surjekce jsou všechny tři funkce f_0, F^{-1} a g a složenina na sebe navazujících surjekcí je surjekce (úloha 1.3.11).

Úloha 2.1.1 Existuje kladné reálné číslo epsilon, že pro každé kladné reálné číslo delta existují taková dvě reálná čísla a a b z množiny M, že a a b jsou blíže než delta, ale funkční hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ jsou vzdálené alespoň epsilon.

Úloha 2.1.2 Nerovnost stačí dokázat pro $n = 2$, pro větší n se použije indukce. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolná reálná čísla. Mají-li stejné znaménko nebo je-li alespoň jedno z nich nula, pak $|a+b| = |a|+|b|$. Mají-li různá znaménka, pak $|a+b| \le \max(\{|a|, |b|\}) \le |a| + |b|$.

Úloha 2.1.5 $+\infty$, $-\infty$, $-\infty$ a nedefinováno.

Úloha 2.1.6 $(\mathbb{R}, <)$ jsme rozšířili přidáním nekonečen tak, že $-\infty \not< -\infty$ i $+\infty \not< +\infty$ a rozšířená relace $<$ je tedy ireflexivní. Její tranzitivita je také jasná. Například z $-\infty < a$ a $a < +\infty$ máme podle definice, že $-\infty < +\infty$. Podobně ostatní případy. Trichotomie se v rozšíření také zachovala.

Úloha 2.1.8 Tyto množiny jsou $\emptyset$ a $\{-\infty\}$.

Úloha 2.1.12 Okolí bodů a nekonečen jsou intervaly a tedy konvexní množiny.

Úloha 2.1.13 Pro $A, B \in \mathbb{R}$ stačí vzít $\varepsilon < \frac{B-A}{2}$. Pokud $A = -\infty$ a $B = +\infty$, vezmeme ε libovolně. Pokud $A = -\infty$ a $B \in \mathbb{R}$, vezmeme $\varepsilon < \frac{1}{|B|+1}$.

Úloha 2.1.14 To plyne hned z definic okolí.

Úloha 2.1.15 Opět to plyne hned z definic okolí.

Úloha 2.1.18 Kromě V_4 jsou všechny ostatní vlastnosti robustní.

Úloha 2.1.20 Patrně

$$\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}} = \frac{n^{-1/6}-1}{n^{-1/4}} \to \frac{0-1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

díky kladnosti odmocniny $n^{-1/4}$.

Úloha 2.2.2 Reflexivita plyne z volby $m_n = n$. Tranzitivita je celkem jasná při použití „vynechávacího“ pojetí podposloupností.

Úloha 2.2.3 Jsou to třeba posloupnosti $(0, 1, 0, 1, \dots)$ a $(1, 0, 1, 0, \dots)$.

Úloha 2.2.7 Nechť (b_n) a (a_n) jsou uvedené posloupnosti a je dáno ε. Existuje tedy n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \varepsilon)$. Pak existuje n_1, že $n \geq n_1 \Rightarrow m_n \geq n_0$. Pak pro každé $n \geq n_1$ je $b_n = a_{m_n} \in U(L, \varepsilon)$ a $\lim b_n = L$.

Úloha 2.2.8 Lehce se vidí, že posloupnost $(m_n) \subset \mathbb{N}$ dosvědčující, že $(b_n) \preceq^* (a_n)$, má rostoucí podposloupnost.

Úloha 2.2.9 Koeficient u $a^j b^{n-j}$ je roven počtu způsobů, jak v součinu $(a+b)^n$ zvolit j činitelů, v nichž vybereme číslo a. Ve zbylých $n-j$ činitelích vybereme číslo b. Počet j-prvkových podmnožin n-prvkové množiny je právě $\binom{n}{j}$.

Úloha 2.2.11 Plyne to negací limity $n^{1/n} \to 1$.

Úloha 2.3.1 Pokud takové c existuje, pro každé n je $-c \leq a_n \leq c$ a (a_n) je omezená zdola i shora, takže je omezená podle definice. Nechť je naopak (a_n) omezená podle definice, takže $d \leq a_n \leq c$ pro každé n a nějaká čísla d a c. Potom $|a_n| \leq \max(\{|d|, |c|\})$ pro každé n.

Úloha 2.3.2 Posledních pět týkajících se omezenosti.

Úloha 2.3.5. Pokud (a_n) např. neklesá od $n = m$ a $b_n = a_n$ pro každé $n \geq n_0$, pak (b_n) neklesá od $n = \max(\{m, n_0\})$.

Úloha 2.3.6 Pokud např. (a_n) neroste, pak pro každé n platí implikace $a_m > a_n \Rightarrow m < n$, takže (a_n) kvazineroste. Podobně pro neklesající posloupnost.

Úloha 2.3.7 Je to například posloupnost $(1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 5, \dots)$. Kvazineklesá, ale žádný koncový úsek není monotónní.

Úloha 2.3.8 Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je kvazimonotónní, právě když

$$\forall\, l\, \exists\, m\, \big(n > m \Rightarrow a_n \geq a_l\big) \vee \forall\, l\, \exists\, m\, \big(n > m \Rightarrow a_n \leq a_l\big)\ .$$

Úloha 2.3.11 Pokud (a_n) např. kvazineklesá od $n = m$ a $b_n = a_n$ pro každé $n \geq n_0$, pak (b_n) kvazineklesá od $n = \max(\{m, n_0\})$.

Úloha 2.3.13 Zobecnění říká, že pro každé (konečné či nekonečné) LU $(X, <)$ každá posloupnost (a_n) v X má monotónní podposloupnost. Důkaz je téměř stejný.

Úloha 2.3.16 Lehce se vidí, že limita c této podposloupnosti splňuje nerovnosti $a \leq c \leq b$.

Úloha 2.3.18 Pokud v dané cauchyovské posloupnosti (a_n) nahradíme členy a_1 až a_m hodnotami a_1' až a_m', vzniklá posloupnost (a_n') je stále cauchyovská, protože index n_0 lze vždy vzít větší než m.

Úloha 2.3.19 Nechť (a_n) je Cauchyova. Pak existuje n_0, že pro každé $m, n \geq n_0$ je $|a_m - a_n| \leq 1$. Podle Δ-ové nerovnosti pro každé n je $|a_n| \leq 1 + \max(\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|\})$ a posloupnost (a_n) je omezená.

Úloha 2.3.21 Je to například posloupnost $(1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots)$ konečných zkrácení desetinného rozvoje čísla $\sqrt{2}$.

Úloha 2.3.22 V důkazu jsme použili B.–W. větu, jejíž důkaz je založen na existenci vlastní limity omezené monotónní posloupnosti. A pro to potřebujeme existenci suprema, resp. infima, příslušné množiny reálných čísel.

Úloha 2.3.23 černý

Úloha 2.3.24 Tenkrát na Východě bylo pro příslušný slovník nutné navštívit knihkupectví nebo knihovnu. Jiná možnost byla zeptat se někoho ze Slovenska.

Úloha 2.3.26 Ukážeme, že $f(n)$ je superaditivní funkce. Slova, která splňují obě podmínky nazveme přípustnými. Nechť je $m, n \in \mathbb{N}$, $a_1 \dots a_{f(m)}$ je přípustné slovo nad abecedou $[m]$ s maximální délkou a $b_1 \dots b_{f(n)}$ je přípustné slovo nad abecedou $\{m+1, \dots, m+n\}$ s maximální délkou. Konkatenace

$$u = a_1 \dots a_{f(m)} b_1 \dots b_{f(n)}$$

je přípustné slovo nad abecedou $[m+n]$, takže $f(m) + f(n) \leq f(m+n)$. Jak víme, že u neobsahuje *abba*? Díky tomu, že se slovo *abba* nedá napsat jako konkatenace dvou slov nad disjunktními abecedami.

Úloha 2.3.27 Argumentuje se jako v předešlé úloze. Klíčové opět je, že slovo *abab* nelze napsat jako konkatenaci dvou slov nad disjunktními abecedami.

Úloha 2.3.28 Ovšem slovo *aabb* lze napsat jako konkatenaci dvou slov nad disjunktními abecedami, $aabb = aa\,bb$, a předešlý argument užívající Feketeho lemma nelze použít.

Úloha 2.3.29 Ukážeme, že pro každé pevné k je funkce $r_k(n)$ subaditivní. Množinu $A \subset \mathbb{Z}$ neobsahující AP délky k nazveme přípustnou. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $A \subset [m+n]$ je přípustná množina maximální velikosti $|A| = r_k(m+n)$. Lehce se vidí, že množiny

$$A' = [m] \cap A \ \text{ a } \ A'' = \{x \in [n] \mid x + m \in A\}$$

jsou přípustné (neobsahování AP délky k se dědí na podmnožiny a zachovává posunem). Tedy $r_k(m+n) = |A| = |A'| + |A''| \leq r_k(m) + r_k(n)$.

Úloha 3.1.1 Na rovnosti $a = (a+b) + (-b)$ & $a = (a-b) + b$ použijeme obyčejnou Δ-ovou nerovnost a výsledky upravíme.

Úloha 3.1.3 1. Nechť $|a_n| \leq d$ pro každé n, $L = -\infty$ a je dáno $c < 0$. Patrně pro každé velké n je $b_n \leq c - d$. Tedy pro každé velké n je $a_n + b_n \leq d + c - d = c$ a $a_n + b_n \to -\infty$. Případ, že $L = +\infty$ je podobný.

2. Nechť $|a_n| \leq d$ pro každé n, $b_n \to 0$ a je dáno ε. Patrně pro každé velké n je $|b_n| \leq \varepsilon/d$. Tedy pro každé velké n je $|a_n b_n| \leq d(\varepsilon/d) = \varepsilon$ a $a_n b_n \to 0$.

3. Nechť a_n, c, $L = +\infty$ a b_n jsou, jak uvedeno, a je dáno $d > 0$. Patrně pro každé velké n je $b_n \geq d/c$. Tedy pro každé velké n je $a_n b_n \geq c \cdot (d/c) = d$ a $a_n b_n \to +\infty = L$. Další případy jsou podobné.

4. Nechť $|a_n| \leq d$ pro každé n, $b_n \to \pm\infty$ a je dáno ε. Patrně pro každé velké n je $|b_n| \geq d/\varepsilon$. Tedy pro každé velké n je $|a_n/b_n| = |a_n| \cdot (1/|b_n|) \leq d(1/(d/\varepsilon)) = \varepsilon$ a $a_n/b_n \to 0$.

5. Nechť a_n, c a b_n jsou, jak uvedeno, a je dáno $d > 0$. Patrně pro každé velké n je $0 < b_n \leq c/d$. Tedy pro každé velké n je $a_n/b_n \geq c/(c/d) = d$ a $a_n/b_n \to +\infty$. Další případy jsou podobné.

6. Nechť a_n, c, $L = -\infty$ a b_n jsou, jak uvedeno, a je dáno $d < 0$. Patrně pro každé velké n je $b_n <\leq dc$. Tedy pro každé velké n je $b_n/a_n \leq (dc)/c = d$ a $b_n/a_n \to -\infty = L$. Další případy jsou podobné.

Úloha 3.1.5 1. Pro $A \in \mathbb{R}$ vezmeme $a_n = n$, $b_n = -n + A$. Pro $A = +\infty$ vezmeme $a_n = n$, $b_n = -\sqrt{n}$. Pro $A = -\infty$ vezmeme $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = -n$.

2. Pro $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vezmeme $a_n = \operatorname{sgn}(A)/n$, $b_n = n|A|$. Pro $A = 0$ vezmeme $a_n = 0$, $b_n = n$. Pro $A = +\infty$ vezmeme $a_n = 1/n$, $b_n = n^2$. Pro $A = -\infty$ vezmeme $a_n = -1/n$, $b_n = n^2$.

3. Pro $A \in \mathbb{R}$ vezmeme $a_n = A/n$, $b_n = 1/n$. Pro $A = \pm\infty$ vezmeme $a_n = 1/n$, $b_n = \pm 1/n^2$ (shodná znaménka).

4. Pro $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vezmeme $a_n = An$, $b_n = n$. Pro $A = 0$ vezmeme $a_n = n$, $b_n = n^2$. Pro $A = \pm\infty$ vezmeme $a_n = \pm n^2$, $b_n = n$ (shodná znaménka).

Úloha 3.2.1 Tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

Úloha 3.2.3 Plyne to z identity $|a_n - 0| = ||a_n| - 0|$ $(= |a_n|)$.

Úloha 3.3.1 Pro $A, B \in \mathbb{R}$ vezmeme libovolné $\varepsilon < \frac{B-A}{2}$. Pro $A = -\infty$ a $B = +\infty$ vezmeme libovolné ε. Pro $A = -\infty$ a $B \in \mathbb{R}$ vezmeme libovolné $\varepsilon < \min(\{1, \frac{1}{|B|+1}\})$. Podobně pro $A \in \mathbb{R}$ a $B = +\infty$.

Úloha 3.3.3 Množina dvojic posloupností $\big((a_n), (b_n)\big)$, pro něž existuje n_0, že $a_m < b_n$ pro každé $m, n \geq n_0$, je vlastní podmnožinou množiny dvojic posloupností $\big((a_n), (b_n)\big)$, pro něž existuje n_0, že $a_n < b_n$ pro každé $n \geq n_0$.

Úloha 3.3.4. Například $(a_n) = (\frac{1}{n})$ a $(b_n) = (0, 0, \dots)$.

Úloha 3.3.5. Nechť (a_n), (b_n), K a L jsou, jak uvedeno. Patrně můžeme vzít takové číslo c, že $K < c < L$. Podle úlohy 2.1.12 existuje ε, že $U(K, \varepsilon) < U(c, \varepsilon) < U(L, \varepsilon)$. Pak stačí vzít libovolná dvě čísla $a, b \in U(c, \varepsilon)$ s $a < b$. Pro každé velké m a n je $a_m \in U(K, \varepsilon)$ a $b_n \in U(L, \varepsilon)$, takže $a_m \leq a$ a $b \leq b_n$.

Úloha 3.3.8 Ano, každá jednoprvková množina $\{a\}$ je takovým intervalem.

Úloha 3.3.11 Nechť $\lim a_n = -\infty$, $b_n \leq a_n$ pro každé velké n a je dáno $c < 0$. Pak pro každé velké n je $b_n \leq a_n \leq c$, tedy $b_n \leq c$, a $\lim b_n = -\infty$. Případ s limitou $+\infty$ je podobný

Úloha 3.4.2 Podle části 1 věty 2.2.5 má každá posloupnost podposloupnost, jež má limitu.

Úloha 3.4.7 Části 3 a 4 lze zredukovat na části 1 a 2 pomocí identity $\liminf a_n = -\limsup(-a_n)$.

Úloha 3.4.8 V m-tém kroku, $m \in \mathbb{N}$, m-tý úsek posloupnosti (a_n) projde čísla $-m$, $-m+1/m$, $-m+2/m$, $\dots$, m.

Úloha 3.4.9 Neexistuje, protože $H(a_n) \cap \mathbb{R}$ je vždy uzavřená množina.

Úloha 3.4.10 $H(a_n) = \{0, +\infty\}$.

Úloha 3.5.3 Nechť $\sum_{x \in X} r_x$ je konečná AK řada a $Y = \{x \in X :\ r_x \neq 0\}$. Položíme $c = \sum_{x \in Y} |r_x|$, což je konečný součet. Pro každou konečnou množinu $Z \subset X$ pak jistě platí, že $\sum_{x \in Z} |r_x| = \sum_{x \in Z \cap Y} |r_x| \le c$.

Úloha 3.5.5 Opět nechť $R = \sum_{x \in X} r_x$ je konečná AK řada a $Y = \{x \in X : r_x \neq 0\}$ (což je konečná množina). $f\colon \mathbb{N} \to X$ buď bijekce. Je jasné, že posloupnost $(\sum_{i=1}^{n} r(f(i)))$ je eventuálně konstantní s konstantou $\sum_{x \in Y} r_x$, takže R má součet rovný konečnému součtu $\sum_{x \in Y} r_x$.

Úloha 3.5.9 Množiny Z_i' jsou po dvou disjunktní. Když x probíhá bijektivně všechny prvky množiny X_0, probíhá tím bijektivně postupně všechny prvky množin Z_1', $\dots$, Z_{n-1}', Z_n''.

Úloha 3.5.11 Nechť horní meze c a d dosvědčují, že R a S jsou AK řady a $Z \subset X \cup Y$ je konečná množina. Pak $|\sum_{x \in Z} r_x| \le |\sum_{x \in Z \cap X} r_x| + |\sum_{x \in Z \cap Y} r_x| \le c + d$ a T je AK řada. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to X$ a $g\colon \mathbb{N} \to Y$ jsou bijekce. Z nich definujeme tuto bijekci $h\colon \mathbb{N} \to X \cup Y$: $h(2n-1) = f(n)$ a $h(2n) = g(n)$. Pak $t = \lim \sum_{i=1}^{n} t_{h(i)} = \lim \sum_{i=1}^{n} r_{f(i)} + \lim \sum_{i=1}^{n} s_{g(i)} = r + s$.

Úloha 4.1.1 Existenci ani neexistenci limity posloupnosti neovlivní změna konečně mnoha jejích členů.

Úloha 4.1.2 Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou konvergentní řady, přičemž pro nějaké m platí, že $b_n = a_n$ pro $n \neq m$ a $b_m = a_m + c$, kde $c \neq 0$. Nechť (s_n) a (t_n) jsou posloupnosti částečných součtů. Pak zřejmě $t_n = s_n$ pro $n < m$ a $t_n = s_n + c$ pro $n \ge m$, takže pro součty těchto řad platí, že $\sum b_n = \lim t_n = c + \lim s_n = c + \sum a_n$.

Úloha 4.1.3 Částečné součty od jistého indexu neklesají, resp. nerostou.

Úloha 4.1.4 Zde $s_n = n$, takže $\lim s_n = +\infty$.

Úloha 4.1.7 První rovnost plyne z definice částečného součtu. Druhá z aritmetiky limit posloupností. Třetí z předpokladu a z limity podposloupnosti. Čtvrtá je triviální.

Úloha 4.1.8 Vzhledem k monotonii posloupnost (a_n) má limitu L. Limitu L mají i všechny podposloupnosti, takže $L = +\infty$.

Úloha 4.1.9 Nechť (s_n) a (t_n) jsou částečné součty obou řad. Patrně existuje konstanta c, že pro každé $n \ge n_0$ platí nerovnost $s_n \ge t_n + c$. Protože $\lim(t_n + c) = +\infty$, z věty o jednom strážníkovi plyne, že i $\lim s_n = +\infty$.

Úloha 4.1.12 Nechť $n \ge 2$. Z předpokladu, že $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = m \in \mathbb{N}$, odvodíme spor. Každý jmenovatel $j = 1, 2, \dots, n$ napíšeme podle návodu ve tvaru $j = a(j) \cdot 2^{b(j)}$, kde $a(j) \in \mathbb{N}$ je liché a $b(j) \in \mathbb{N}_0$. Pro $j_0 = 2^k$, kde $k \in \mathbb{N}$ je největší číslo s $2^k \le n$, je toto vyjádření tvaru $j_0 = 1 \cdot 2^k$. Pro každé $j \in [n] \setminus \{j_0\}$ je $b(j) < k$. Tedy $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = (a+b)/(a \cdot 2^k)$, kde $a := a(1)a(2)\dots a(n) \in \mathbb{N}$ je liché číslo a $b \in \mathbb{N}$ je sudé číslo, protože je součtem $n-1$ sudých čísel. Čitatel $a+b$ je tedy liché číslo a mocninu $2^k \geq 2$ ve jmenovateli nelze zkrátit. Rovnost $(a+b)/(a \cdot 2^k) = m$ je tak nemožná. Tento argument vlastně dokazuje, že pro žádné $n \geq 2$ neplatí rovnost $h_n = \frac{k}{l}$ s lichým jmenovatelem l.

Úloha 4.1.13 ???

Úloha 4.1.15 Od řady $\sum a_n$ se přejde k řadě $\sum(-a_n)$.

Úloha 4.1.20 Je to speciální případ důsledku 3.5.7.

Úloha 4.1.23 Plyne to z rovnosti $q^m + q^{m+1} + \cdots = q^m \cdot (1 + q + \cdots)$.

Úloha 4.1.24 Každá, která konverguje, takže právě a jen s kvocientem $q \in (-1, 1)$.

Úloha 4.1.28 Vyplývá to z divergence harmonické řady.

Úloha 4.1.29 Právě pro $s > 1$, opět podle CKK.

Úloha 4.2.1 Nechť M a A jsou, jak uvedeno, a nechť platí 1, takže A je limitní bod M podle uvedeně definice. Pro každé n vybereme číslo $a_n \in P(A, 1/n) \cap M$ a dostaneme tím posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ s limitou A, takže platí 2. Pak pro každé m existuje ε, že $a_1, \ldots, a_m \notin U(A, \varepsilon)$. Z (a_n) tak můžeme vybrat prostou podposloupnost a platí 3. Nechť platí 3 a $(b_n) \subset M$ je prostá posloupnost s limitou A. Pro dané n je $b_m \in U(A, 1/n)$ pro každé velké m a z těchto jen pro nejvýše jedno m se $b_m = A$, takže jistě $P(A, 1/n) \cap M \neq \emptyset$ a platí 4. Je jasné, že $4 \Rightarrow 1$.

Úloha 4.2.3 Nechť $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ je konečná množina a $x \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo. Vezmeme ε menší, než je nejmenší vzdálenost mezi x a prvkem v $M \setminus \{x\}$ (pokud $M \setminus \{x\} = \emptyset$, klademe $\varepsilon := 1$). Pak $P(x, \varepsilon) \cap M = \emptyset$ a x není limitním bodem množiny M. Díky omezenosti M ani $-\infty$ ani $+\infty$ není jejím limitním bodem.

Úloha 4.2.4. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je nekonečná množina. Je-li neomezená, je $-\infty$ nebo $+\infty$ její limitní bod. Nechť M je omezená. Díky nekonečnosti M pomocí AC z M vybereme prostou posloupnost $(a_n) \subset M$. Z ní pomocí tvrzení 2.3.12 vybereme monotónní podposloupnost (b_n). Podle omezenosti (b_n) a věty o limitě monotónní posloupnosti máme vlastní limitu $\lim b_n = b$. Protože $(b_n) \subset M$ a $b_n \neq b$ pro každé n, podle úlohy 4.2.1 vidíme, že b je limitní bod množiny M.

Úloha 4.2.5 Plyne to hned z části 2 tvrzení 4.2.2.

Úloha 4.2.8. Už žádné.

Úloha 4.2.11 Třeba $A = 0$, $M = \{\pm\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $f = 0$ na $M \setminus X$ a $f = 1$ na X.

Úloha 4.2.13 Z každého prvku množiny $\{\{x \in P(K, 1/n) \cap M : \ f(x) \notin U(L, \varepsilon)\} : n \in \mathbb{N}\}$ jsme vybrali prvek.

Úloha 4.2.14. 1. Díky algebraické úpravě ($x < 0$, takže $x = -|x|$) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2-1}} = \frac{1}{-\sqrt{1/x^2+1-1/|x|}}$ dostáváme pro $x \to -\infty$ limitu $\frac{1}{-\sqrt{1/(+\infty)+1-0}} = -1$.

2. Úprava $\frac{1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}} = \sqrt{1+x} + \sqrt{x}$ dává pro $x \to +\infty$ limitu $\sqrt{1+(+\infty)} + \sqrt{+\infty} = +\infty$.

3 a 4. Tyto limity jsou triviální, první neexistuje a druhá se rovná 0.

Úloha 4.3.2 Tolik, jako reálných čísel, $k_c \mapsto c$ je bijekce z množiny konstant do $\mathbb{R}$.

Úloha 4.3.3 Vezmeme m, že $m \geq 2|x|$. Pak pro každé $n \geq m$ je $|x^n/n!| \leq (|x|^m/m!) \cdot (1/2)^{n-m} = (2|x|)^m/m! \cdot (1/2)^n$. Pak použijeme odhad založený na geometrické řadě.

Úloha 4.3.5 1. $\exp 0 = 1$ je trivialita a zbytek plyne z exponenciální identity. 2. Pro $x < y$ je $\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{y-x} - 1) > 0$ podle exponenciální identity. 3. Pro $x > n$ je $\mathrm{e}^x > n$, takže $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Dále $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 1/\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = 1/(+\infty) = 0$.

Úloha 4.3.7 Pro spor nechť $\sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} = \frac{n}{m}$ s $n, m \in \mathbb{N}$. Úpravou navrženou v návodu dostaneme, že $r := \sum_{j > m} \frac{m!}{j!} = n \cdot (m-1)! - \cdots \in \mathbb{N}$. To ale není možné, protože $0 < r \leq \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)^j} = \frac{m+2}{(m+1)^2} < 1$.

Úloha 4.3.8 1. $\log 1 = 0$ plyne z $\exp 0 = 1$. Překlopením grafu podle přímky $y = x$ dostaneme z rostoucí funkce $\exp x$ opět rostoucí funkci $\log x$. Pro $x, y > 0$ díky exponenciální identitě máme rovnost $\exp(\log x + \log y) = x \cdot y$, takže $\log x + \log y = \log(xy)$. 2. Tyto limity zase lehce vidíme ze vztahu grafů exponenciály a logaritmu pomocí překlopení podle přímky $y = x$. 3. To plyne z části 4 předchozího tvrzení.

Úloha 4.3.12 Začneme s a^x, $a > 0$. Pro $x = 0$ je $\exp(x \log a) = \exp 0 = 1$. Pro $x \in \mathbb{N}$ je $\exp(x \log a) = \exp(\log a + \cdots + \log a)$ s x sčítanci $\log a$, což se díky exponenciální identitě rovná $\exp(\log a) \cdot \ldots \cdot \exp(\log a) = a \cdot \ldots \cdot a$ s x činiteli a. Pro každé $x \in \mathbb{N}$ je díky exponenciální identitě $\exp((-x) \log a) = 1/\exp(x \log a)$. Tedy a^x souhlasí s x^m. Pokračujeme s x^b. Nechť $b \in \mathbb{N}$, $x > 0$. Pak opět $\exp(b \log x) = \exp(\log x + \cdots + \log x) = \exp(\log x) \cdot \ldots \cdot \exp(\log x) = x \cdot \ldots \cdot x$ s b činiteli x. Dále $0^b = 0 = 0 \cdot \ldots \cdot 0$. Nechť $b = 0$ a $x > 0$. Pak $x^b = 1$. Nechť $b \in \mathbb{Z}$ s $b < 0$ a $x > 0$. Pak opět pomocí exponenciální identity je $x^b = 1/x^{-b}$ Tedy x^b souhlasí s x^m. Konečně $0^x = 0$ pro $x \in \mathbb{N}$ také souhlasí s x^m.

Úloha 4.3.13 Podle definice 4.3.10 se $\mathrm{e}^x = \exp(x \log \mathrm{e})$. Ovšem díky definici $\mathrm{e} = \exp 1$ vidíme, že se to rovná $\exp x$.

Úloha 4.3.15 S $A = 1 + x$, $B = 1 + x + x^2$, $C = 1 + x^3$ a $D = 1 + x^2 + x^4$, pro něž se podle návodu $AD = BC = E$, máme dokázat, že $(A^y + B^y)^x \cdot (C^x + D^x)^y = (A^x + B^x)^y \cdot (C^y + D^y)^x$. Ekvivalentně, že $E^{xy}(1 + (\frac{B}{A})^y)^x (1 + (\frac{C}{D})^x)^y = E^{xy}(1 + (\frac{A}{B})^x)^y (1 + (\frac{D}{C})^y)^x$. Což ale platí, protože $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$ a $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ a násobení je komutativní.

Úloha 4.3.16 Pro $A = 0$ položíme $a_n = 1/n^n$ a $b_n = 1/n$. Pro $0 < A < 1$ položíme $a_n = A^n$ a $b_n = 1/n$. Pro $A = 1$ položíme $a_n = b_n = 1/n$. Pro $1 < A < +\infty$ položíme $a_n = 1/A^n$ a $b_n = -1/n$. Pro $A = +\infty$ položíme $a_n = 1/n^n$ a $b_n = -1/n$. Protože $a^b < 0$, jen když $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Úloha 4.3.17 Postupujte jako v úloze 4.3.3.

Úloha 4.3.19 1. Za čas 2π běžkyně oběhne jedno kolo a dostane se do stejné pozice. 2. Tak se chová y-ová souřadnice polohy běžkyně v první čtvrtině jejího oběhu kola. 3. Plyne to ze symetrie dráhy podle y-ové osy a podle počátku souřadnic $(0, 0)$. 4. První vztah plyne z geometrického faktu, že otočení S kolem počátku o $\pi/2$ (v kladném směru) je ekvivalentní prohození souřadných os. Druhý vztah prostě vyjadřuje, že každý bod na S má od počátku euklidovskou vzdálenost 1. 5. Zkuste vyhledávání obrázků pro „geometric proof of summation formulae for sinus and cosinus“.

Úloha 4.3.21 Porovnejte mocninné řady pro exponenciálu, kosinus a sinus.

Úloha 4.3.22 Z vlastností kosinu a sinu víme, jaké jsou jejich nulové body.

Úloha 4.4.1 Plyne to z komutativity, asociativity a distributivity operací $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{R}$ a z toho, že tyto vlastnosti má i množinový průnik: $M \cap N = N \cap M$, $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$ a $M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap (M \cap P)$. Číslo 0, resp. 1, je samozřejmě neutrální vzhledem ke sčítání, resp. násobení, na $\mathbb{R}$ a také vždy $\mathbb{R} \cap M = M$. Žádná funkce $f \in \mathcal{R}$ s $M(f) \neq \mathbb{R}$ ale nemá ani aditivní ani multiplikativní inverz.

Úloha 4.4.3 Hodnoty funkcí $f - g$ a $f + f_{-1} \cdot g$ se patrně shodují a stejně tak i jejich definiční obory: $M(f) \cap M(g) = M(f) \cap (\mathbb{R} \cap M(g))$.

Úloha 4.4.5 $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$.

Úloha 4.4.6 Je to prázdná funkce $\emptyset$.

Úloha 4.4.7 Ano, podle předešlé úlohy. Ale třeba i $x^{1/2} + (-x-1)^{1/2} = \emptyset$.

Úloha 4.4.8 $g = k_{-1} \cdot f$.

Úloha 4.4.10 Například $f(x) = \sqrt{\sin(\pi x)} + \sqrt{-\sin(\pi x)}$ a $g(x) = \frac{1}{\sin(\pi/x)}$, kde π je k_π a x je $\mathrm{id}_\mathbb{R}$.

Úloha 4.4.11 Pro $a > 0$ máme vyjádření $a^x = \exp(x \log a)$. Pro $b \in \mathbb{N}$ máme vyjádření $x^b = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \,|\, [0, +\infty)$ (s pomocí tvrzení 4.4.9). Pro $b = 0$ máme vyjádření $x^0 = k_1 \,|\, (0, +\infty)$ (s pomocí tvrzení 4.4.9). Pro $b \in \mathbb{Z}$ s $b < 0$ a $x > 0$ máme vyjádření $x^b = \exp(b \log x)$. Pro 0^x máme vyjádření $0^x = k_0 \,|\, (0, +\infty)$. Pro funkce x^m, $m \in \mathbb{Z}$, je jejich vyjádření z ostatních ZEF jasné.

Úloha 4.4.15 Například $\arcsin x$, $|x|$ nebo $\arcsin(\sin x)$.

Úloha 4.5.3 Nechť $p \neq k_0$ má kanonický tvar $\sum_{j=0}^n a_j x^j$. Indukcí podle $\deg p = n$ dokážeme, že $|Z(p)| \leq n$. Pro $n = 0$ to platí, pak $p = k_{a_0}$ s $a_0 \neq 0$ a p nemá nulový bod. Nechť $n > 0$. Pokud p nemá nulový bod, nerovnost platí. Nechť $p(a) = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Pak p (v kanonickém tvaru) vydělíme polynomem $x - a = \mathrm{id}_\mathbb{R} - k_a$ se zbytkem a dostaneme vyjádření $p = (x-a)q$ s nějakým polynomem q stupně $n-1$. Pro každé $b \neq a$ s $p(b) = 0$ je $q(b) = 0$. Indukcí tak $|Z(p)| = 1 + |Z(p) \setminus \{a\}| \leq 1 + |Z(q)| \leq 1 + (n-1) = n$.

Úloha 4.5.4 Díky tvrzení 4.4.2 zbývá dokázat jen existenci aditivních inverzů a definiční vlastnost oboru integrity. Inverzy existují díky úloze 4.4.8 a tomu, že každý polynom má definiční obor $\mathbb{R}$. Nenulovost součinu dvou nenulových polynomů plyne z vynásobení jejich kanonických tvarů.

Úloha 4.5.8 Reflexivita a symetrie relace $\sim$ jsou zřejmé. Dokážeme tranzitivitu. Nechť $r \sim s$ a $s \sim t$. Uvážíme kanonické tvary těchto rac. funkcí: $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{c}{d}$ a $t = \frac{e}{f}$. Podle předpokladu $r = s$ na $M(r) \cap M(s) = \mathbb{R} \setminus Z(bd)$ a $s = t$ na $\mathbb{R} \setminus Z(df)$. Takže $r = t$ na $\mathbb{R} \setminus (Z(bd) \cup Z(df)) = (\mathbb{R} \setminus Z(bf)) \setminus Z(d) = (M(r) \cap M(t)) \setminus Z(d)$. Díky spojitosti r a t v každém bodu $x \in M(r) \cap M(t) \cap Z(d)$ se r a t rovnají i na $M(r) \cap M(t)$ a $r \sim t$.

Úloha 4.5.9 Nechť $r, s, t, r', s' \in \mathrm{RAC} \setminus \{\emptyset\}$. Není těžké vidět (pomocí spojitosti rac. funkcí), že z $r \sim r'$ a $s \sim s'$ plyne i $r + s \sim r' + s'$ a $r \cdot s \sim r' \cdot s'$. Můžeme tak mezi sebou sčítat a násobit celé ekvivalenční bloky. Komutativita a asociativita sčítání a násobení a distributivní zákon v $\mathbb{R}(x)$ plynou hned z aritmetiky v $\mathbb{R}$. Pro existenci inverzů potřebujeme právě ekvivalenční bloky. K $[r]_\sim = [p/q]_\sim$ je aditivním inverzem $[(-p)/q]_\sim$, jejich součet je $[k_0/q]_\sim = [k_0]_\sim$. Podobně k $[r]_\sim = [p/q]_\sim \neq [k_0]_\sim$ (tedy $p \neq k_0$) je aditivním inverzem $[q/p]_\sim$, jejich součin je $[pq/qp]_\sim = [k_1]_\sim$.

Úloha 4.5.11 Protože na RAC relace $\sim$ není relací ekvivalence.

Úloha 5.1.1 Nechť $b \in L^-(M)$. Z průniku $P^-(b, 1/n) \cap M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ vybereme bod a_n a dostaneme hledanou posloupnost (a_n). Když $b \notin L^-(M)$, pak pro nějaké ε je $P^-(b, \varepsilon) \cap M = \emptyset$ a požadovaná posloupnost neexistuje. Pro $L^+(M)$ argumentujeme podobně.

Úloha 5.1.2 První dvě implikace plynou z toho, že jednostranné prstencové okolí je obsažené v oboustranném. Třetí implikaci dokážeme. Nechť b je limitní bod množiny M. Existuje tedy taková posloupnost $(a_n) \subset M \setminus \{b\}$, že $\lim a_n = b$. Ta má takovou podposloupnost (a_{m_n}), že $a_{m_n} > b$ pro každé n nebo $a_{m_n} < b$ pro každé n. Tedy b je pravým nebo levým limitním bodem množiny M. 4. Např. 0 je limitní bod množiny $[0, 1)$, ale není jejím levým limitním bodem.

Úloha 5.1.3 Je to například množina $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Úloha 5.1.4 Viz řešení úlohy 4.2.4.

Úloha 5.1.6 1. Zde je a limitní bod množiny M, takže, jak víme, je její levý nebo pravý limitní bod. 2. Toto plyne z inkluze $P(a, \delta) \subset P^-(a, \delta') \cup P^+(a, \delta'')$, $\delta = \min(\{\delta', \delta''\})$. 3. Kdyby $\lim_{x \to a} f(x) = A$, stačí vzít tak malé ε, že $U(A, \varepsilon)$ a $U(K, \varepsilon)$, či $U(A, \varepsilon)$ a $U(L, \varepsilon)$, jsou disjunktní a dostaneme spor.

Úloha 5.1.8 Důkaz je podobný důkazu tvrzení 4.2.9.

Úloha 5.1.10 Důkaz je podobný důkazu věty 4.2.12.

Úloha 5.1.12 To plyne z rovnosti obrazů $f[P^{\pm}(b, \delta)] = (f \mid I^{\pm}(b))[P(b, \delta)]$.

Úloha 5.2.2 Právě když existuje posloupnost $(b_n) \subset M(f)$, že $\lim b_n = b$, ale $\lim f(b_n)$ neexistuje nebo se nerovná $f(b)$. Nebo, podle úlohy 5.2.9, právě když existuje posloupnost $(b_n) \subset M(f)$ s $\lim b_n = b$, která má limitu lišící se od $f(b)$.

Úloha 5.2.3 Řešení nerovnosti $|x - b| < \delta$, resp. $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$, je právě $U(b, \delta)$, resp. $U(f(b), \varepsilon)$. Neostré nerovnosti jsou ekvivalentní, stačí trochu zmenšit δ či ε.

Úloha 5.2.5 Pokud $b \in M \setminus L(M)$, existuje δ, že $U(b, \delta) \cap M(f) = \{b\}$. Jediné posloupnosti v $M(f)$ limitící k b pak jsou eventuálně konstantní posloupnosti (a_n) s $a_n = b$ pro $n \geq n_0$. Pak ale $\lim f(a_n) = f(b)$, což souhlasí s tím, že f je (triviálně nebo podle tvrzení 5.2.8) v takovém bodu b vždy spojitá.

Úloha 5.2.6 Když $b \in M$ je izolovaný, není limitní a existuje ε, že $M \cap P(b, \varepsilon) = \emptyset$. Pak $M \cap U(b, \varepsilon) = \{b\}$. Když $b \in M$ není izolovaný, je limitní a pro každé ε je $M \cap P(b, \varepsilon) \neq \emptyset$. Tedy pro každé ε je $M \cap U(b, \varepsilon) \neq \{b\}$.

Úloha 5.2.7 To hned plyne z definice izolovaného bodu.

Úloha 5.2.9 To plyne hned z Heineho definice spojitosti funkce v bodu a z části 3 věty 2.2.5.

Úloha 5.2.10 Nechť f je spojitá v $b \in M(f)$ a je dáno ε. Pak existuje δ, že $f[U(b, \delta)] \subset U(f(b), \varepsilon)$. Tedy $f[U^-(b, \delta)] \subset U(f(b), \varepsilon)$ i $f[U^+(b, \delta)] \subset U(f(b), \varepsilon)$, protože $U^-(b, \delta)$ i $U^+(b, \delta)$ je obsažené v $U(b, \delta)$. Takže f je spojitá v b zleva i zprava.

Nechť f je spojitá v $b \in M(f)$ zleva i zprava a je dáno ε. Pak existují δ' a δ'', že $f[U^-(b, \delta')] \subset U(f(b), \varepsilon)$ a $f[U^+(b, \delta')] \subset U(f(b), \varepsilon)$. Položíme $\delta = \min(\{\delta', \delta''\})$. Dostaneme, že $f[U(b, \delta)] \subset U(f(b), \varepsilon)$, protože $U(b, \delta) \subset U^-(b, \delta') \cup U^+(b, \delta'')$. Takže f je spojitá v b.

Úloha 5.2.12 Každé číslo v M je kladné, protože x je iracionální. V $U(x,1)$, což je interval délky 2, leží jen konečně mnoho zlomků se shora omezeným jmenovatelem, takže M je konečná množina. V $U(x,1)$ ale také leží alespoň jedno celé číslo, takže $M \neq \emptyset$.

Úloha 5.3.2 Nechť $f \in \mathcal{F}(M)$. Pro $b \in L^-(M)$ a f nerostoucí na $P^-(b,\delta)$ nahradíme supremum infimem. Pro $b \in L^+(M)$ a f neklesající (resp. nerostoucí) na $P^+(b,\delta)$ vezmeme infimum (resp. supremum). Pro $+\infty \in L(M)$ a f nerostoucí na $U(+\infty,\delta)$ nahradíme supremum infimem. Pro $-\infty \in L(M)$ a f neklesající (resp. nerostoucí) na $U(-\infty,\delta)$ vezmeme infimum (resp. supremum).

Úloha 5.3.4 $M(f/g) = M(f) \cap M(g) \setminus Z(g)$ a existuje δ, že $Z(g) \cap U(A,\delta) = \emptyset$.

Úloha 5.3.5 Je to speciální případ třetí části věty s $f = k_1$, kdy $f/g = 1/g$.

Úloha 5.3.8 1. Předešlý důkaz věty se snadno upraví, pro $K < L$ existuje ε a reálná čísla a, b, že $U(K,\varepsilon) < \{a\} < \{b\} < U(L,\varepsilon)$. 2. Opět jen obměněná implikace.

Úloha 5.3.10 Jen se přidá jednostrannost limit. Důkazy jsou redukce pomocí tvrzení 5.1.13 na obyčejné limity.

Úloha 5.4.3 Nechť $(a_n) \subset M\backslash\{A\}$ má $\lim a_n = A$ a je dáno ε. Podle předpokladů existuje δ', že $f[P(K,\delta')] \subset U(L,\varepsilon)$, a existuje δ, že $g[P(A,\delta)] \subset U(K,\delta')$. Pak pro velké n je $g(a_n) \in U(K,\delta)$. Platí-li podmínka 1, pro stejné n je i $f(g(a_n)) \in U(L,\varepsilon)$ — případné hodnoty $g(a_n) = K$ funkce f posílá na $f(K) = L \in U(L,\varepsilon)$. Tedy $\lim f(g)(a_n) = L$ a podle Heineho definice limity funkce se $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$. Platí-li podmínka 2, pro velké n je dokonce $g(a_n) \in P(K,\delta)$. Pro stejné n je i $f(g)(a_n) \in U(L,\varepsilon)$ a podle Heineho definice limity funkce zase $\lim_{x\to A} f(g)(x) = L$. Případ, že ani jedna podmínka neplatí jsme vyřešili pomocí Heineho definice limity funkce už v původním důkazu.

Úloha 5.4.6 Použijeme větu 5.4.1 s vnější funkcí $1/x$, vnitřní funkcí g, $A = A$ a $K = B$. Teď je vzhledem ke spojitosti $1/x$ splněna první podmínka.

Úloha 5.5.2 V [8] se (asi) $\mathbf{N} = \{0,1,2,\dots\}$. Není těžké vidět, že $g = O(f)$ podle této definice, právě když $g = O(f+1)$ (na $\mathbb{N}_0$) podle definice 5.5.1.

Úloha 5.5.3 1. Ano. 2. Ne (problém u 0). 3. Ne (problém u $\pm\infty$). 4. Ano. 5. Ne (problém u 0). 6. Ano.

Úloha 5.5.5 1. Ano. 2. Ano. 3. Ne. 4. Ne. 5. Ano. 6. Ano.

Úloha 5.5.6 Pro $k \in \mathbb{N}$ s $k \leq x$ se počet dvojic $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ s $mn = k$ rovná $\tau(k)$.

Úloha 5.5.7 Protože pro $n = 1$ se $n \log n = 0$.

Úloha 6.1.2 Použijeme tvrzení 5.2.8, každý bod definičního oboru je izolovaný.

Úloha 6.1.3 Plyne to z toho, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, δ a ε je $k_a[U(x,\delta)] = \{a\} \subset U(k_a(x),\varepsilon) = U(a,\varepsilon)$.

Úloha 6.1.4 Zde pro každé $a \in \mathbb{R}$ a dané ε stačí vzít $\delta = \varepsilon$, protože $x[U(a,\delta)] = U(a,\delta)$.

Úloha 6.1.6 Nechť N je hustá v M & $a \in M$. Pro každé n vezmeme bod b_n v $N \cap U(a,1/n)$ a dostaneme posloupnost $(b_n) \subset N$ s $\lim b_n = a$. Když $(b_n) \subset N$ má $\lim b_n = a \in M$, pak pro každé δ je $b_n \in U(a,\delta)$ pro každé velké n.

Úloha 6.1.7 Ukážeme, že pro každá dvě reálná čísla $a < b$ interval (a, b) obsahuje zlomek α i iracionální číslo β. Vezmeme $\alpha = \frac{m}{n}$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z}$ a tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{1}{n} < b - a$. Podobně vezmeme $\beta = \frac{m\sqrt{2}}{n}$ pro nějaké $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a tak velké $n \in \mathbb{N}$, že $\frac{2\sqrt{2}}{n} < b - a$.

Úloha 6.1.8 Nechť $0 \le a < b \le 1$ a $n \in \mathbb{N}$ je největší číslo, že $\frac{1}{n} \ge \frac{a+b}{2}$. Pak netriviální interval $(\max(\{a, \frac{1}{n+1}\}), \frac{a+b}{2})$ je obsažený v (a, b) a je disjunktní s N.

Úloha 6.2.2 Funkce s je na $\mathbb{N}$, protože každé přirozené číslo je součin lichého čísla a mocniny dvou. Tato vyjádření jsou jednoznačná: když $(2k-1)2^{l-1} = (2m-1)2^{n-1}$, pak $l = n$ (jinak by 2 dělila liché číslo), tedy i $k = m$ a s je prostá.

Úloha 6.2.4 Podle úlohy 6.1.2 jsou konstanty spojité. Z $k_a = k_b$ plyne, že $a = b$.

Úloha 6.2.5 Injekce z $\mathbb{R}$ do $\mathcal{C}(M)$ je opět dána konstantními funkcemi. Injekci z $\mathcal{C}(M)$ do $\mathbb{R}$ definujeme jako pro $M = \mathbb{R}$, pouze místo $\mathbb{Q}$ vezmeme nějakou nejvýše spočetnou množinu $N \subset M$ hustou v M a obor hodnot $\mathbb{N}$ funkce r a první složku $\mathbb{N}$ definičního oboru funkce s případně nahradíme neprázdným konečným počátečním úsekem $\mathbb{N}$.

Úloha 6.3.2 Nechť $a < c < b$ s $a, c \in f[I]$. Pak podle věty je i $c \in f[I]$. Tedy $f[I]$ je interval.

Úloha 6.3.4 Stačí dokázat, že pro každé dvě spojité funkce $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ splňující $f(0) = g(1) = 0$ a $f(1) = g(0) = 1$ existuje $t \in (0,1)$, že $f(t) = g(t)$. Vezmeme spojitou funkci $h = f - g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a použijeme větu o nabývání mezihodnot.

Úloha 6.4.2 Pro každé $x \in [0,1)$ a každé $y \in (x,1)$ platí, že $f(y) > f(x)$ a $g(y) > g(x)$.

Úloha 6.4.4 Věta 6.4.3 $\Rightarrow$ věta 6.4.1, jak hned uvidíme, kompaktní množina je omezená a uzavřená, takže má minimum i maximum.

Úloha 6.4.5 1. Zřejmé z definice. 2. Nechť $A_j \subset \mathbb{R}$, $j \in J$, jsou otevřené množiny a b je v $\bigcup_{j \in J} A_j =: A$. Pak existuje $j_0 \in J$, že $b \in A_{j_0}$. Tedy existuje δ, že $U(b, \delta) \subset A_{j_0}$. Pak ale i $U(b, \delta) \subset A$ a A je otevřená množina. 3. Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou otevřené množiny a $b \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j =: A$. Podle předpokladu existují čísla δ_j, že $U(b, \delta_j) \subset A_j$ pro každé $j = 1, \ldots, n$. Pro $\delta := \min(\{\delta_1, \ldots, \delta_n\})$ je $U(b, \delta) \subset A$ a A je otevřená množina. 4. To plyne pomocí de Morganova vztahu, že průnik doplňků je doplněk sjednocení. 5. Opět pomocí de Morganova vztahu.

Úloha 6.4.9 Je to uzavřená množina, protože je průnikem uzavřených množin. Je nespočetná, protože to je množina těch bodů z $[0,1]$, jejichž rozvoj se základem 3 má cifry jenom 0 a 2. Má „délku“ 0, protože $1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \cdots = 0$.

Úloha 6.4.11 $[a,b] \setminus P(c, \delta) = [a,b] \cap (\mathbb{R} \setminus ((c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)))$, takže jde o uzavřenou a omezenou množinu.

Úloha 6.5.1 Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá, $c \in M$ a je dáno ε. Pro toto ε vezmeme δ zaručené stejnoměrnou spojitostí. Pak jistě $f[U(c, \delta)] \subset U(f(c), \varepsilon)$, takže f je spojitá v c.

Úloha 6.5.3 Nechť $a_n := \frac{1}{n}$ a $b_n := \frac{2}{\pi(2n-1)}$. Pak $\lim(a_n - a_{n+1}) = \lim(b_n - b_{n+1}) = 0$, ale pro každé n se $f(a_{n+1}) - f(a_n) = 1$ a $f(b_{n+1}) - f(b_n) = 2$.

Úloha 6.6.2 Plyne to z aritmetiky spojitosti, z definice polynomů a racionálních funkcí a ze spojitosti konstant a identity.

Úloha 6.6.4 V rozdílu $a_n(x+c)^n - a_nx^n$ použijeme binomickou větu, zrušíme a_nx^n a vytkneme c. Trojúhelníková nerovnost dává, že $|a_n\sum_{i=1}^n \binom{n}{i}c^{i-1}x^{n-i}|$ je nejvýše $|a_n|\sum_{i=1}^n \binom{n}{i}|c|^{i-1}|x|^{n-i}$. Čísla $|c|$ i $|x|$ nahradíme alespoň tak velkým číslem $|x|+|c|$. V $n-1$-té mocnině ho vytkneme a součet binomických koeficientů je $\le 2^n$.

Úloha 6.6.5 Stačí dokázat, že pro každé $c>0$ se $\lim c^n/n! = 0$. Pro velké n je nezáporná posloupnost $(c^n/n!)$ klesající, takže má limitu $d \ge 0$ a existuje m, že $d = \inf(\{c^n/n! \mid n \ge m\})$. Nechť pro spor $d>0$. Pak pro dostatečně velké $n \ge m$ je $d\cdot(n+1)/c > c^n/n!$. Tedy $d > c^{n+1}/(n+1)!$, což je spor, a $d=0$.

Úloha 6.6.10 Funkce f daná jako $f(x) = x$ na $(0,1)$ a s hodnotou $f(2) = 1$ je spojitá a rostoucí, ale její inverz $f^{-1}\colon (0,1] \to (0,1)\cup\{2\}$ není spojitý v 1. Funkce f s hodnotami $f(0)=1$, $f(n) = 1-\frac{1}{n}$ pro $n\in\mathbb{N}$ má uzavřený definiční obor $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ a je prostá a spojitá, ale její inverz $f^{-1}\colon \{1-\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{1\} \to \mathbb{N}_0$ není spojitý v 1.

Úloha 6.6.11 $\log x$ je spojitý podle každé z částí 2–4 věty, $\arccos x$ a $\arcsin x$ podle každé z částí 1, 2 a 4 a $\arctan x$ a $\mathrm{arccot}\, x$ podle každé z částí 2–4.

Úloha 7.1.2 Pomocí důsledku 5.4.4.

Úloha 7.1.4 Je to vlastně instance tvrzení 5.1.7.

Úloha 7.1.5 Nechť $f\in\mathcal{F}(M)$ a $b\in M\cap L^{\pm}(M)$. Pak platí ekvivalence, že $f'_{\pm}(b) = L$ $\iff$ $(f\,|\,I^{\pm}(b))'(b) = L$ (shodná znaménka). Je to vlastně instance tvrzení 5.1.13.

Úloha 7.1.6 První tvrzení je zřejmé z definic. Číslo 0 je limitním bodem intervalu $(0,1)$, není ale jeho OLB.

Úloha 7.1.8 Není, konce intervalu $[0,1]$ nejsou jeho oboustrannými limitními body.

Úloha 7.1.11 Patrně se $\mathrm{sgn}'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{-1-0}{x-0} = +\infty$. Podobně $\mathrm{sgn}'_+(0) = +\infty$. Podle části 2 úlohy 7.1.4 se $\mathrm{sgn}'(0) = +\infty$.

Úloha 7.1.12 Patrně se $(|x|)'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0} = -1$ a podobně pro derivaci zprava.

Úloha 7.1.14 Například funkce $\mathrm{sgn}\, x$ má $\mathrm{sgn}'(0) = +\infty$ a přitom 0 není limitním bodem jejího obrazu $\{-1,0,1\}$.

Úloha 7.1.15 Plyne to z faktu, že f je spojitá v b.

Úloha 7.1.16 Jednostranná derivace $(\sqrt{x})'_-(0)$ není definovaná, protože 0 není levý limitní bod definičního oboru $[0,+\infty)$ odmocniny. Ostatní jednostranné derivace se rovnají obyčejným derivacím.

Úloha 7.1.17 Pro každé $x\ne b$ se $\frac{k_c(x)-k_c(b)}{x-b} = \frac{0}{x-b} = 0$. Tedy $k'_c = k_0$.

Úloha 7.1.19 To přesně říká tvrzení 7.1.10.

Úloha 7.1.21 To je právě předpoklad, že $a_n - b_n = o(b_n)$ $(n\to\infty)$.

Úloha 7.2.2 To vyplývá z limity $\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b)$.

Úloha 7.2.3 Pro $a>0$ tato rovnice je $y = x/2\sqrt{a} + \sqrt{a}/2$. V $a=0$ funkce $\sqrt{x}$ není diferencovatelná.

Úloha 7.2.4 Naopak zřejmě každá dvojice (s,t) určuje jednoznačnou nesvislou přímku $y = sx+t$ a tyto dvě korespondence jsou vzájemně inverzní.

Úloha 7.2.6 Řešení soustavy $sa+t=b$, $sa'+t=b'$ s danými a, a', b, b' a neznámými s, t je jednoznačné a jeho složka s má uvedené vyjádření.

Úloha 7.2.8 Nechť přímka ℓ daná rovnicí $y=sx+t$ je limitní tečna ke G_f v bodu $(b,f(b))$. Vezmeme libovolnou posloupnost $(b_n)\subset M(f)\setminus\{b\}$, že $b_n\to b$. Nechť je přímka $\kappa(b_n,f(b_n),b,f(b))$ dána rovnicí $y=s_nx+t_n$. Pak $s_n\to s$, $t_n\to t$ a vždy $s_nb+t_n=f(b)$. Tedy $f(b)=s_nb+t_n\to sb+t$, $sb+t=f(b)$ a $(b,f(b))\in\ell$.

Úloha 7.2.12 Nechť b, M a f jsou, jak uvedeno. Podle Heineho definice limity funkce a věty 2.2.5 můžeme vzít posloupnost (a_n), která limití k b z jedné strany a má limitu $\lim f(a_n)\neq f(b)$. Pak už stačí vzít libovolnou posloupnost (b_n), která limití k b z druhé strany a pro kterou existuje $\lim f(b_n)$.

Úloha 7.2.13 Nechť jsou ℓ_n a ℓ dány rovnicemi $y=s_nx+t_n$ a $y=sx+t$. Podle předpokladu platí, že $\lim s_n=s$ a $\lim t_n=t$. Ale $c=sb+t$ a $c_n=s_nb+t_n$, takže $\lim c_n=\lim(s_nb+t_n)=\cdots=sb+t=c$.

Úloha 7.2.14 Nechť d_n je infimum těch ε, že $\frac{y_n-c}{x_n-b}\in U(A,\varepsilon)$. Patrně můžeme předpokládat, že vždy $y_n\neq c$ nebo že $A=0$. Pak není těžké induktivně definovat rostoucí posloupnost $(m_n)\subset\mathbb{N}$, že vždy $\frac{y_n-u_{m_n}}{x_n-z_{m_n}}\in U(A,d_n+\frac{1}{n})$. Tím jsme hotovi, protože $\lim d_n=0$.

Úloha 7.2.15 Vezmeme $b=0$, $M=\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\sin(1/x)$ pro $x\neq0$, $f(b)=f(0)=0$, $x_n=\frac{2}{(4n-1)\pi}$ a $y_n=\frac{2}{(4n-3)\pi}$ $(n\in\mathbb{N})$. Pak $f'(0)=0$, ale sklon sečny $\kappa(x_n,f(x_n),y_n,f(y_n))$ je $\frac{y_n^2+x_n^2}{y_n-x_n}\gg n^{-2}\cdot n^2$, tedy $\geq c>0$ pro každé n.

Úloha 7.3.2 $(\mathrm{sgn}(x)-\sqrt{x})'(0)=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$.

Úloha 7.3.4 Patrně $fg=gf$.

Úloha 7.3.5 Snadno se vidí, že $f'(0)=+\infty$, $g'(0)=-\infty$, $(fg)(x)=-1$ pro $x\neq0$ a že $(fg)(0)=-\frac{1}{4}$. Tedy $(fg)'_-(0)=+\infty$, $(fg)'_+(0)=-\infty$ a $(fg)'(0)$ neexistuje.

Úloha 7.3.7 Jen změníme hodnotu f v 0 na $f(0)=\frac{1}{2}$. Pak $\frac{f'(0)g(0)-f(0)g'(0)}{g(0)^2}=((+\infty)\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(-\infty))/\frac{1}{4}=+\infty$, ale $(f/g)(x)=-1$ pro $x\neq0$ a $(f/g)(0)=1$. Derivace $(f/g)'(0)$ opět neexistuje.

Úloha 7.4.2 Bez spojitosti g v b nemusí vzorec $(f(g))'(b)=f'(g(b))\cdot g'(b)$ platit v tom smyslu, že pravá strana může být definovaná, ale levá ne. Vezmeme $f(x)=x^2$, $g(x)$ je modifikované znaménko s hodnotou $g(0)=\frac{1}{2}$ a $b=0$ $(M=L(M)=\mathbb{R})$. Pak $f'(g(b))=(2x)(\frac{1}{2})=1$, $g'(b)=+\infty$ a pravá strana je $1\cdot(+\infty)=+\infty$, ale $f(g)(x)=1$ pro každé $x\neq0$ a $f(g)(0)=\frac{1}{4}$, takže $(f(g))'(b)$ neexistuje.

Úloha 7.4.4 Pak vzorec $(f^{-1})'(c)=1/f'(f^{-1}(c))$ nemusí platit, v tom smyslu, že pravá strana může být definovaná, ale levá ne. Například pro $f(x)=x-1$ na $(-\infty,0)$, $f(0)=0$ a $f(x)=x+1$ na $(0,+\infty)$, což je zproštěné znaménko, a $c=0$, se pravá strana rovná $1/f'(f^{-1}(c))=1/f'(0)=1/(+\infty)=0$, ale levá není definovaná, protože $0\notin L(M(f^{-1}))=L((-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,+\infty))$.

Úloha 7.5.2 V první nerovnost použijeme úpravu, že pro $n=0$ se $\frac{1}{c}(a_n(x+c)^n-a^nx^n)$ rovná 0 a pro $n\geq1$ je $a_n\sum_{j=0}^{n-1}(x+c)^jx^{n-1-j}$. Pak n nahradíme $n+1$. Ve druhé nerovnosti použijeme úpravu, že $\sum_{j=0}^{n}(x+c)^jx^{n-j}-(n+1)x^n=c\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}c^{i-1}x^{n-i}$

(Binomická věta), přičemž $n \geq 1$. Pak použijeme Δ-ovou nerovnost a $|c|$ i $|x|$ nahradíme alespoň tak velkou veličinou $y = |c| + |x|$. Ve třetí nerovnosti vytkneme y^{n-1} a součet binomických koeficientů je $\leq 2^j$. Ve čtvrté nerovnosti je $\sum_{j=1}^{n} 2^j \leq 2^{n+1}$.

Úloha 7.5.4 1. Derivace $(a^x)' = (\exp((x \log a))' = \cdots = a^x \cdot \log a$ plyne z druhé části věty 7.4.1, z důsledku 7.5.3 a z derivace $(k_c \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}})' = k_c$. 2. Uvedená derivace plyne pro $b < 1$ a $x > 0$ (neboť $(x^b)'(0) = +\infty$) zderivováním funkce $\exp(b \log x)$ s použitím druhé části věty 7.4.1, důsledku 7.5.3, druhé části tvrzení 7.3.1, derivace logaritmu a definice funkce x^b. Když $b > 1$, ještě se snadno ověří z definice, že $(x^b)'(0) = 0$. 3. Toto plyne hned z definice funkce x^b. 4. Toto plyne hned z definice funkce 0^x. 5. Použije se Leibnizův vzorec, definice funkce x^m a derivace $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}' = k_1$. 6. Použije se derivace $k_1' = k_0$.

Úloha 7.5.5 Derivace funkce $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ plyne z derivací $(\sin x)' = \cos x$ a $(\cos x)' = -\sin x$, z identity $\sin^2 x + \cos^2 x = k_1$ a z druhé části věty 7.3.6. Podobně pro $\cot x$.

Úloha 7.5.6 Derivace funkce arkus sinus plyne z derivace $(\sin x)' = \cos x$, ze vztahu $\cos \mid (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \sqrt{1 - (\sin \mid (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))^2}$ a z důsledku 7.4.5. Podobně pro zbylé tři derivace.

Úloha 7.5.7 Patrně $f'(x) = (2x \sin(1/x) - \cos(1/x)) \cup \{(0,0)\} \notin \mathcal{C}$. Hodnota $f'(0) = 0$ se dokáže z definice derivace.

Literatura

[1] 0.999 . . . , článek ve Wikipedii, `https://en.wikipedia.org/wiki/0.999...`

[2] P. Acroyd, *Newton. Stručný životopis*, Academia, Praha 2010 (přeložila I. Dvořáková)

[3] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Dover, New York 1993 (první vydání v l. 1928–1929)

[4] J. H. Conway and R. G. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, New York 1996

[5] E. T. Copson, *Asymptotic Expansions*, Cambridge University Press, Cambridge, UK 1967

[6] A. Erdélyi, *Asymptotic Expansions*, Dover Publications, Inc., U.S.A. 1956

[7] M. Klazar, Real analysis without uncountable sets, arXiv:2301.08142, ...

[8] J. Krajíček, *Proof Complexity*, Cambridge University Press, Cambridge 2019

[9] D. Normann and S. Sanders, On the uncountability of $\mathbb{R}$, *J. Symb. Logic* **87** (2022), 1474–1521

[10] J. Peregrin a M. Vlasáková, *Filosofie logiky*, Filosofia, Praha 2017

[11] E. Szemerédi, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arith.* **27** (1975), 199–245

[12] T. Tao, Szemerédi's proof of Szemerédi's theorem, *Acta Mathematica Hungarica* **161** (2020), 443–487

[13] L. Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus. Logisch-philosophische Abhandlung*, Kegan Paul, London 1922

[14] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, OIKOYMENH, Praha 2017 (přeložil P. Glombíček)

[15] P. Zamarovský, *Mýtus nekonečno*, Univerzita Karlova. Nakladatelství Karolinum, Praha 2019

Rejstřík

Čísla stran ve *skloněném fontu* odkazují na výskyt definice pojmu, na důležitou pasáž a na větu s důkazem.