

Integrace racionálních funkcí

racionální funkce $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty.

$f: \mathbb{R} \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$, kde $K = \{d \in \mathbb{R} : Q(d) = 0\}$... kořenem polynomu Q .

Př. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$; $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$\frac{P(x)}{Q(x)} : I \rightarrow \mathbb{R}$, kde $I = (a, b)$, podle V. 5.2 má $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na I prim. funkci. Dá se tato prim. funkce napsat v tvoru \int ?

Odpověď: ANO, ale za předpokladu, že dokážeme nalézt kořeny (reálné i komplexní) polynomu $Q(x)$.

Věta 5.6 (obecný tvar funkce primitivní k racionální funkci)

$I=(a,b), f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ bud' rac. funkce.

Funkce f má na I primitivní funkci F tvaru, kterou se dá vyjádřit pomocí rac. funkce, logaritmu a arcus tangent.

Podrobněji:

$$F(x) = v(x) + \sum_{l=1}^k a_l \log(p_l(x)) + \sum_{i=1}^l b_i \arctan(q_i(x)),$$

Kde $v(x)$ je rac. funkce, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, p_i, q_i jsou polynomy s $\deg(p_i) \leq 2, \deg(q_i) = 1$.

Popíšeme algoritmus pro nalezení F v tomto tvaru. Bude-
me si ale muset připomenout vlastnosti polynomů.

Věta (základní věta algebry)

$n \geq 1$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$, lvd' polynom.

Pak existuje $d \in \mathbb{C}$ takové, že $P(d) = 0$. Tj. každý nekonstantní komplexní polynom má kořen.

D (Gauss, ≈ 1800) nebudeme dělat. ☒

Důsledek Pro P jako výše existují až ve n pořadí jednoduše určená (ne nutně různá) čísla $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{C}$ taková, že

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - d_1)(x - d_2) \dots (x - d_n)$

D. ~~~~~ ☒

Důsledek $P(x) = a_n (x - \beta_1)^{k_1} (x - \beta_2)^{k_2} \dots (x - \beta_r)^{k_r}$, kde $\beta_i \in \mathbb{C}$

jsou vzájemně různá čísla, $k_i \in \mathbb{N}$ a $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$.
D. ~~~~~ ☒

$d_i, \beta_i \dots$ kořeny polynomu P , $\alpha_i \dots$ násobnosti kořenů.

Takže kořeny = nulové body polynomu P .

$(x-d_i), (x-\beta_i)$ - kořenové činitele

Důsledek Každý polynom P , který není identicky nulový, má nejvýše $\deg(P)$ nulových bodů.

Důsledek Necht' $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$
 $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0, b_i \in \mathbb{C}, b_m \neq 0$ jsou dva

komplexní polynomy a existuje z různých čísel $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{C}$, $k \geq \max(m, n)$
a $P(d_1) = Q(d_1), \dots, P(d_k) = Q(d_k)$. Potom $P(d) = Q(d)$ pro $\forall d \in \mathbb{C}$ a
 $k = n, a_m = b_m, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.

D. ~~~~~ tabule

Tvrzení Je-li d kořenem polynomu $P(x)$ s násobností q , potom je d kořenem $P'(x)$ s násobností $q-1$.

D. ~~~~~ tabule. **Důsledek** Násobnost d v $P(x) = \min. q$ takové, že $P^{(q)}(d) \neq 0$.

Polynomy s reálnými koeficienty

Tvrzení Je-li $d = a + bi \in \mathbb{C}$ kořenem reálného polynomu $P(x)$ s násobností q , pak i $\bar{d} = a - bi$ je kořenem $P(x)$ s násobností q .

D. ~~~~~ tabule ~~~~~

Důsledek \forall reálný polynom $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, má aš ve pořadí faktorů jednorázový vzhled

$$P(x) = a_n (x-d_1)^{q_1} \dots (x-d_r)^{q_r} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{p_1} \dots (x^2 + \beta_s x + \gamma_s)^{p_s}$$
, kde $q_i, p_i \in \mathbb{N}$, $d_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, žádné dva z polynomů $x-d_i, x^2 + \beta_i x + \gamma_i$ nemají společný kořen a kv. polynom $x^2 + \beta_i x + \gamma_i$ nemá reálný kořen.

D. ~~~~~ tabulka ~~~~~

Tvrzení 5.7 P, Q buďte reálné polynomy, $\deg(P) < \deg(Q)$,
(rozklad na parciální zlomky)

$$Q(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x-d_1)^{\alpha_1} \dots (x-d_r)^{\alpha_r} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + \beta_s x + \gamma_s)^{\beta_s}$$

buď rozklad jako výše. Pak

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{a_{i,j}}{(x-d_i)^j} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{b_{i,j}x + c_{i,j}}{(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^j}$$

parciální zlomky

pro jednorozměrně určená reálná čísla $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j} \in \mathbb{R}$.

D. nebudeme dělat.



Integrace vac. funkce $\frac{P(x)}{Q(x)} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, kde P, Q jsou reálné polynomy.

1. krok Dělení se zbytkem: $P = QP_1 + P_2, \deg(P_2) < \deg(Q)$.

Takže $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \underbrace{\int P_1(x) dx}_{\text{trivi}} + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)} dx, \deg(P_2) < \deg(Q)$.

2. krok Rozklad na parciální zlomky: podle Tvz. 5.7,

$$\int \frac{P_2(x)}{Q(x)} dx \stackrel{c}{=} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{h_i} \int \frac{a_{i,j} dx}{(x-d_i)^j} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{l_i} \int \frac{b_{i,j}x + c_{i,j}}{(x^2 + \beta_i x + \gamma_i)^j} dx$$

($Q = mm$ je rozložen jako v Tvz. 5.7).



3. krok Nalezení prim. funkcí na PS rovnosti, tj. integrace

parc. zlomků.

$$a) \int \frac{a}{(x-d)^n} \stackrel{c}{=} \left. \begin{array}{l} \int \frac{a}{1-n} \frac{1}{(x-d)^{n-1}} \dots n > 1 \\ \int a \cdot \log|x-d| \dots n = 1 \end{array} \right\} \text{na } (-\infty, d), (d, +\infty)$$

$a \neq 0, d \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

b) $I = \int \frac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^q} dx$, $q \in \mathbb{N}$, $x^2+\beta x+\gamma$ nemá reálný kořen
 $\Leftrightarrow \gamma - \beta^2/4 > 0$
 $b, c, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; $b \neq 0$ v $c \neq 0$.

$$I = \underbrace{\frac{b}{2} \int \frac{2x+\beta}{(-4)^q} dx}_{I_1} + \underbrace{\left(c - \frac{b\beta}{2}\right) \int \frac{dx}{(-4)^q}}_{I_2}$$

$I_1 \stackrel{c}{=} \frac{1}{(1-q)(x^2+\beta x+\gamma)^{q-1}} \dots q > 1$ (na \mathbb{R})
 $\quad \quad \quad \log(x^2+\beta x+\gamma) \dots q = 1$

substituce $y = x^2 + \beta x + \gamma$, $\frac{dy}{dx} = 2x + \beta$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + \beta x + \gamma)^q} = \int \frac{dx}{\left((x + \beta/2)^2 + \underbrace{\gamma - \beta^2/4}_{\delta > 0} \right)^q} = \frac{1}{\delta^q} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x + \beta/2}{\sqrt{\delta}} \right)^2 + 1 \right)^q} \quad \text{17}$$

I_3

$$I_3 = \int \frac{dt}{\left(\left(\frac{x + \beta/2}{\sqrt{\delta}} \right)^2 + 1 \right)^q} = \sqrt{\delta} \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^q} \quad \text{substitution}$$

T_q

$$t = \frac{x + \beta/2}{\sqrt{\delta}}$$

Jak víme (viz příklad po větě o per partes), $T_1 = \arctan t$,

$$T_{n+1} = \frac{t}{2n(1+t^2)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) T_n. \quad \downarrow \quad T_n(t) = r(t) + c \cdot \arctan t$$

\uparrow \uparrow
 val. funkce \mathbb{R}

Tím je Věta 5.6 dokázána.

~~Polynomdivision~~

Príklad

$$I = \int \frac{1+x^2}{(1+x)(x^2+x+1)} dx = \dots \text{ to solve.}$$