Přednáška 9, 27. listopadu 2019

Řady funkcí. Mocninné řady

Aproximace lomenými čarami a polynomy. Připomeňme si, že funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla, je *lomená čára*, když je f spojitá a existuje takové dělení $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ intervalu $[a,b]$, že každé zúžení $f \mid [a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, 2 \ldots, k$, je lineární funkce. Dále si připomeňme, že pro funkce $f, f_n\colon M \to \mathbb{R}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a M je množina, značení $\lim f_n = f$ znamená, že

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup(\{|f(x) - f_n(x)| \mid x \in M\}) \to 0 \ \text{ pro } \ n \to \infty \ .$$

Symbol $\mathrm{C}[a,b]$ označuje množinu reálných funkcí definovaných a spojitých na intervalu $[a,b]$. V důkazu lemmatu 3 sedmé přednášky jsme dokázali následující tvrzení.

Tvrzení (aproximace lomenými čarami). *Množina lomených čar je hustá v* $\mathrm{C}[a,b]$ *— pro každou funkci* $f \in \mathrm{C}[a,b]$ *existuje posloupnost lomených čar* $(f_n) \subset \mathrm{C}[a,b]$*, že* $\lim f_n = f$.

Nevýhodou lomené čáry je, že obecně nemá všude ani první derivaci. Následující důležitá věta, pro jejíž důkaz bohužel nemáme čas, ukazuje, že každá spojitá funkce se dá libovolně přesně aproximovat funkcemi, které mají derivace všech řádů.

Věta (Weierstrassova: aproximace polynomy). *Množina polynomů je hustá v* $\mathrm{C}[a,b]$ *— pro každou funkci* $f \in \mathrm{C}[a,b]$ *existuje taková posloupnost polynomů* $(f_n) \subset \mathrm{C}[a,b]$*, že* $\lim f_n = f$.

Věta je pojmenována po autorovi, německém matematikovi *Karlu Weierstrassovi (1815–1897).* Teorie aproximací funkcí je rozsáhlá a zajímavá disciplína matematické analýzy, z níž jsme měli čas zmínit jen dva předchozí výsledky.

Spojité funkce mají primitivní funkci.[1] Pěknou aplikací předchozího tvrzení a poslední věty předchozí přednášky (o výměně pořadí limitění a derivování) je následující věta, jejíž známější důkaz používá teorii Riemannova integrálu.

[1]Tento výsledek jsem na přednášce neuváděl.

Věta (existence antiderivace). *Každá funkce $f \in \mathrm{C}[a,b]$ má na (a,b) primitivní funkci, což je taková funkce $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, že*

$$g' = f \quad na \quad (a,b)$$

(pro jednoduchost se zde nebudeme zabývat jednostrannými derivacemi v koncových bodech a a b).

Důkaz. Buď dána $f \in \mathrm{C}[a,b]$. Podle předchozího tvrzení máme lomené čáry $(f_n) \subset \mathrm{C}[a,b]$, že $\lim f_n = f$. Zřejmě každá lomená čára $h \in \mathrm{C}[a,b]$ má na (a,b) (jednoznačnou) primitivní funkci $g \in \mathrm{C}[a,b]$ s hodnotou $g(\frac{a+b}{2}) = 0$ (úloha 2). Například, funkce $h(x) = 1$ pro $0 \le x \le \frac{1}{2}$ a $h(x) = \frac{3}{2} - x$ pro $\frac{1}{2} \le x \le 1$ má primitivní funkci $g(x) = x - \frac{1}{2}$ pro $0 \le x \le \frac{1}{2}$ a $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{8}$ pro $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

Buď g_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ taková primitivní funkce k f_n. Podle poslední věty předchozí přednášky potom

$$g_n \overset{\mathrm{loc}}{\rightrightarrows} g \ \ (\text{na } (a,b))$$

pro nějakou funkci $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ a $g' = f$ na (a,b). □

Řady funkcí. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina a $f, f_n\colon M \to \mathbb{R}$ pro $n = 1, 2, \ldots$ jsou na ní definované reálné funkce. Značení

$$\sum f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f \ \ (\text{na } M)$$

znamená, že $f_1 + f_2 + \cdots + f_n \to f$ (na M). Podobně pro stejnoměrnou konvergenci a lokálně stejnoměrnou konvergenci (kdy je M metrický prostor). Takto se tedy zobecňují numerické řady na parametrické systémy řad. Speciálně se snadno zobecní (stejnoměrná) Bolzanova–Cauchyova podmínka: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na M pro nějakou funkci f, právě když

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 :\ m \ge n \ge n_0,\ x \in M \Rightarrow |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon$$

(úloha 1). Můžeme tedy opět psát pouze $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ (na M).

Tři následující věty pro řady funkcí plynou přímočaře z odpovídajících vět pro posloupnosti funkcí. Ani je nebudeme dokazovat.

Věta ($\sum \leftrightarrow \lim_{x \to x_0}$). *Když $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $\delta > 0$, $f_n\colon P(x_0,\delta) \to \mathbb{R}$ pro $n = 1, 2, \ldots$, $\sum f_n \rightrightarrows$ na $P(x_0,\delta)$ a pro každé n existuje vlastní* $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$, *potom je následující suma i limita definovaná a mají shodnou vlastní hodnotu:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)\ .$$

Věta ($\sum \leftrightarrow \int$).[2] *Když $a<b$ jsou reálná čísla, $f_n\in\mathcal{R}[a,b]$ pro $n=1,2,\ldots$ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $[a,b]$, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\in\mathcal{R}[a,b]$ a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n=\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)\ .$$

Věta ($\sum \leftrightarrow \frac{d}{dx}$). *Když $a<b$ jsou reálná čísla, $g,f_n\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ pro $n=1,2,\ldots$ jsou funkce, pro něž na (a,b) existují derivace f_n', $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'\rightrightarrows g$ na (a,b) a existuje $x_0\in(a,b)$, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\rightrightarrows f$ na (a,b) pro nějakou funkci $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ a $f'=g$ na (a,b). Takže, za těchto předpokladů,*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'\ .$$

Kritéria konvergence řad funkcí. Nejčastěji se používá první z následujících kritérií.

Věta (kritéria konvergence $\sum f_n$). *Nechť f_n pro $n=1,2,\ldots$ jsou reálné funkce.*

1. *(Weierstrassův test) Jsou-li f_n definované na množině M a číselná řada nezáporných sčítanců (mezi nimiž se může vyskytovat i $+\infty$)*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n:=\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|=\sum_{n=1}^{\infty}\sup(\{|f_n(x)|\mid x\in M\})$$

konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\rightrightarrows$ na M.

[2]Existují lepší věty o záměně limity a (i riemannovské) integrace. Pokusím se je zde později doplnit.

2. *(Diniho kritérium) Jsou-li funkce f_n definované, spojité a nezáporné na kompaktním intervalu $[a, b]$ a i jejich bodový součet je spojitá funkce, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $[a, b]$.*

Důkaz. 1. Ověříme pro $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ B.–C. podmínku: pro každé $x \in M$ a $m \geq n \geq 1$ díky trojúhelníkové nerovnosti máme, že

$$\begin{aligned} |f_n(x) + f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| &\leq |f_n(x)| + |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \\ &\leq M_n + M_{n+1} + \cdots + M_m \,. \end{aligned}$$

Podle předpokladu pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že když $m \geq n \geq n_0$, je poslední součet menší než ε (Cauchyova podmínka pro numerickou řadu). B.–C. podmínka pro danou řadu funkcí je tak splněna.

2. Toto je bezprostřední důsledek Diniho věty z minulé přednášky (úloha 11). □

Jak definovat funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, již derivování nezmění, tedy splňuje

$$f' = f \;\text{ na }\; \mathbb{R}\,?$$

A existuje vůbec taková funkce? (Řekněme, že jsme už jsme zapomněli *Matematickou analýzu I.*) Protože $(\frac{x^n}{n!})' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ pro $n \geq 1$ a $(\frac{x^0}{0!})' = 0$, formální výměna sumace a derivace dávají

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \quad (m = n - 1)\,.$$

Je-li tedy funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ dobře definovaná a výměna sumace a derivace přípustná, má tato f požadovanou vlastnost, že $f' = f$. Obě podmínky jsou ale splněné: podle Weierstrassova testu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightrightarrows$ na každém intervalu $(-R, R)$ s $R > 0$ (úloha 3), takže $f(x)$ je skutečně dobře definovaná, a podle předpředchozí věty je výměna sumace a derivace přípustná. Odvodili jsme tedy, že exponenciální funkce $\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ se derivováním nemění.

Mocninné řady. Pro reálná čísla x_0 a $a_0, a_1, \ldots$ definujeme řadu funkcí

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\,.$$

Říká se jí *mocninná řada se středem v* x_0 *a koeficienty* a_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Vždy konverguje ve svém středu a $f(x_0) = a_0$, ale může se klidně stát, že pro žádné jiné reálné $x \neq x_0$ nekonverguje. To je třeba případ mocninné řady $\sum_{n \geq 0} n! x^n$ se středem v 0 (úloha 4). V dalším se pro jednoduchost značení omezíme na mocninné řady se středem v nule.

Věta (Hadamardova o poloměru konvergence). *Nechť* $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ *je mocninná řada se středem v* 0 *a veličina* $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ *je definovaná vzorcem*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}} \ ,$$

kde klademe $\frac{1}{0} = +\infty$ *a* $\frac{1}{+\infty} = 0$. *Potom pro každé* $x \in \mathbb{R}$ *platí:*

$$|x| < R \ \Rightarrow \ \sum_{n \geq 0} a_n x^n \ \text{ absolutně konverguje a}$$

$$|x| > R \ \Rightarrow \ \sum_{n \geq 0} a_n x^n \ \text{ diverguje}\,.$$

Veličině R *se říká* poloměr konvergence (mocninné řady $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$) *a intervalu* $(-R, R)$ interval konvergence.

Důkaz. Když $0 < R < +\infty$ a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\limsup_{n \to \infty} |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = \frac{|x|}{R} \ .$$

Podle Cauchyova odmocninového kritéria (viz *MA I*) tedy řada $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pro $|x| < R$ absolutně konverguje a pro $|x| > R$ diverguje. Pro $R = +\infty$ je $\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = 0$, takže ve výpočtu poslední rovnost přejde v $= 0$ a podle Cauchyova odmocninového kritéria naše řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro $R = 0$ je $\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$, takže pro každé nenulové $x \in \mathbb{R}$ poslední rovnost ve výpočtu přejde v $= +\infty$ a opět podle Cauchyova odmocninového kritéria naše řada diverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ různé od nuly. □

Toto je nejznámější výsledek o mocninných řadách francouzského matematika *Jacquese Hadamarda (1865–1963)*. R se nazývá poloměrem konvergence, protože pro mocninné řady v komplexním oboru (s $a_n, x \in \mathbb{C}$) je R poloměr uzavřeného kruhu se středem v počátku, uvnitř nějž mocninná řada absolutně konverguje a mimo nějž diverguje. O tom, co se děje pro $x = \pm R$, v komplexním oboru na kružnici $|x| = R$, věta neříká nic a musí se to vyšetřit zvlášť.

Lehce se vidí, že $\sum_{n\geq 0} n!x^n$ má poloměr konvergence $R = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ má $R = +\infty$ a všechny tři mocninné řady

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,\ 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \ldots \ \text{ a } \ 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$$

mají $R = 1$, vzhledem k limitě $\lim n^{1/n} = 1$ (úloha 5). První i třetí mocninná řada pro obě hodnoty $x = \pm 1$ divergují, druhá ale diverguje jen pro $x = -1$ a pro $x = 1$ (neabsolutně) konverguje.

Tvrzení (o $\overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ mocninné řady). *Nechť mocninná řada $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \quad \textit{(na } (-R, R)\textit{)}\ .$$

Důkaz. Když $S \in (0, R)$ a $x \in [-S, S]$, podle Cauchyova odmocninového kritéria řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n x^n\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| S^n$$

konverguje (protože $\limsup_{n\to\infty} |a_n S^n|^{1/n} = \frac{S}{R} < 1$). Podle Weierstrassova testu tedy $\sum_{n\geq 0} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[-S, S]$, což je ekvivalentní lokálně stejnoměrné konvergenci na $(-R, R)$. □

Důsledek (derivace a integrace mocninné řady). *Nechť mocninná řada $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ má poloměr konvergence $R > 0$. Pak mocninné řady*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \ \text{ a } \ h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

mají týž poloměr konvergence R a na intervalu $(-R, R)$ pro funkce dané jejich součty platí, že

$$g' = f \ \text{ a } \ f' = h\ .$$

Důkaz. Že $g(x)$ a $h(x)$ mají též poloměr konvergence R plyne z Hadamardova vzorce a z $\lim n^{1/n} = 1$. Rovnosti $g' = f$ a $f' = h$ plynou z předchozího tvrzení a z věty o výměně sumace a derivování. $\square$

Takže funkce daná součtem mocninné řady má derivace všech řádů (a i primitivní funkce všech řádů). Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná jako $f(x) = 0$ pro $x \le 0$ a $f(x) = x^2$ pro $x \ge 0$ tak není na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, součtem mocninné řady, neboť $f''(0)$ neexistuje. Funkce vyjádřené součtem mocninné řady se podobají polynomům, ale jen do určité míry (úloha 8). Součtem a součinem dvou mocninných řad se zabývají úlohy 9 a 10.

Úlohy

1. Dokažte, že stejnoměrná konvergence dané řady funkcí je ekvivalentní splnění stejnoměrné B.–C. podmínky.

2. Dokažte, že každá lomená čára $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ má na (a, b) primitivní funkci g s libovolně předepsanou hodnotou $g(c) = d$ pro jakékoli c v (a, b).

3. Je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$?

4. Dokažte, že pro žádné $x \ne 0$ mocninná řada $\sum_{n\ge0} n!x^n$ nekonverguje.

5. Nechť $p \in \mathbb{R}[x]$ je libovolný polynom. Jaký poloměr konvergence má mocninná řada $\sum_{n\ge0} p(n)x^n$?

6. Určete poloměry konvergence mocninných řad
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4x^n}{3^n - 2n + 1} \quad \text{a} \quad \sum_{n=20}^{\infty} (5^n - 200n^2 + 7n - 2019)x^{3n} \ .$$

7. Určete poloměry konvergence mocninných řad
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n^2} \ .$$

8. Ano nebo ne: nenulová funkce $f(x) = \sum_{n\ge0} a_n x^n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná součtem mocninné řady má, podobně jako nenulový polynom, jen konečně mnoho kořenů (bodů $a \in \mathbb{R}$, že $f(a) = 0$).

9. Jsou-li $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ mocninné řady s kladnými poloměry konvergence, co lze říci o poloměru konvergence mocninné řady

$$\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x^n\,?$$

10. Jsou-li $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ mocninné řady s kladnými poloměry konvergence, co lze říci o poloměru konvergence mocninné řady

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n\,?$$

(Toto je takzvaný Cauchyův součin mocninných řad.)

11. Dokažte Diniho kritérium stejnoměrné konvergence řad funkcí.