9. přednáška z MA II, 19. 4. 2007

<u>Důkaz.</u> a) Pro dané $\varepsilon > 0$ máme n_0 takové, že $n \geq m > n_0 \Rightarrow \sum_{i=m+1}^{n} \|f_i\|_\infty < \varepsilon$ (Cauchyova podmínka pro konvergentní řadu $\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_\infty$). Pak i

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=m+1}^{n} |f_i(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=m+1}^{n} \|f_i\|_\infty < \varepsilon$$ pro každé $x \in M$ a je splněna B.-C. p. pro posl. částečných součtů.

b) Z Diniho věty, posl. část. součtů je monotonní ($f_n \geq 0$), obsahuje spojité funkce a bodově konverguje ke spojité funkci; ~~je tedy~~ konvergence je tedy stejnoměrná. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta 2.8}}$ (Abelovo a Dirichletovo kritérium) $f_n, g_n : M \to \mathbb{R}$. Pak řada $\sum f_n g_n \rightrightarrows$ na M, pokud platí a) nebo b).

a) (Abelovo k.) $\sum f_n \rightrightarrows$ na M; $\underbrace{\exists c > 0, \text{ že } |g_n(x)| < c \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ a každé } x \in M}_{(g_n) \text{ je stejně omezená}}$; posl. $(g_n(x))$ je monotónní pro každé $x \in M$.

b) (Dirichletovo k.) $\underbrace{\exists c>0,\text{ že } |f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)|<c \text{ pro každé } n\in\mathbb{N} \text{ a každé } x\in M}_{\sum f_n \text{ má stejně omezené částečné součty}}$; $g_n \rightrightarrows 0$ na M; posl. $(g_n(x))$ je monotónní pro každé $x\in M$.

D. Nebudeme dělat. ☒

Příklady: • $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-1,1)$ podle W. testu.

Takže $\rightrightarrows$ na $[0,r]$ pro $0<r<1$ a můžeme zaměnit pořadí Σ a $\int$: $\log\frac{1}{1-r} =$

$$= \int_0^r \frac{dx}{1-x} = \int_0^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^r x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n+1}.$$

Odvodili jsme Taylorův rozvoj logaritmu $\log\frac{1}{1-r} = r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} + \dots$, $r\in(-1,1)$.

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightrightarrows$ na $[-R,R]$ pro každé $R>0$ podle W. testu. Funkce $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, která je součtem této řady, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, se tedy rovná své derivaci:

$$\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)'}_{f'(x)} \overset{\substack{\text{věta o záměně} \\ \text{pořadí } \Sigma \text{ a derivace}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = f(x).$$

Protože $f(x) = e^x$, dokázali jsme tak, že $(e^x)' = e^x$.

- Řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}\cdot\cos(32^n \pi x)$ konverguje na celém $\mathbb{R}$ stejnoměrně (podle W. testu, $\|f_n\|_\infty = 4^{-n}$), její součet je tedy spojitá funkce. Dá se dokázat, že tato funkce nemá v žádném bodě derivaci.

$\boxed{\text{Mocninné řady}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, kde $a_n, x_0 \in \mathbb{R}$,

je mocninná řada se středem v x_0 a s koeficienty a_n. Pro jednoduchost se v dalším omezíme na střed $x_0 = 0$, tj. na m. řady tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

$\boxed{\text{Věta 2.9}}$ (o poloměru konvergence)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je m. řada a $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ je definováno vztahem $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$ $\left(\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0\right)$. Potom platí:

$|x| < R \Rightarrow$ m. řada absolutně konverguje

$|x| > R \Rightarrow$ m. řada diverguje.

<u>Poznámka.</u> R je tzv. <u>poloměr konvergence</u> m. řady. Pro $|x| = R$, tj. $x = \pm R$, věta neříká nic. Pro $x = 0$ m. řada vždy konverguje k součtu a_0.

<u>Důkaz.</u> Nechť nejprve $0 < R < +\infty$. Potom

$$\limsup |a_n x^n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n} \cdot |x| =$$

$$= |x| \cdot \limsup |a_n|^{1/n} = \frac{|x|}{R} \begin{cases} < 1 & \text{pro } |x| < R \\ > 1 & \text{pro } |x| > R. \end{cases}$$

Podle Cauchyova odmocninového kritéria tedy $\sum a_n x^n$ abs. konverguje, resp. diverguje, pro $|x| < R$, resp. $|x| > R$.

Pro $R = +\infty$ máme $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$, takže $\limsup |a_n x^n|^{1/n} = |x| \limsup |a_n|^{1/n} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

M. řada tedy abs. konverguje pro $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pro $R=0$ je $\limsup |a_n|^{1/n} = +\infty$ a opět $\limsup |a_n x^n|^{1/n} = +\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. M. řada tedy diverguje $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\boxtimes$

Interval $(-R, R)$ nazveme <u>intervalem konvergence</u> m. řady. Pro $R = +\infty$ m. řada abs. konverguje všude, pro $R = 0$ ~~ab~~ konverguje jen pro $x = 0$.

Tvrzení 2.10 (lokálně stejnoměrná konvergence m. řady)
Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr k. $R > 0$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na $(-R, R)$, tj. $\rightrightarrows$ na $[a,b]$ pro každý kompaktní podinterval $[a,b] \subset (-R, R)$.

D. Nechť $0 < S < R$ a $K = [-S, S]$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n x^n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, \|x^n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| S^n$ konverguje (opět podle odmocninového kritéria, $\limsup |a_n S^n|^{1/n} = \dots = \frac{S}{R} < 1$) a podle W. testu máme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[-S, S]$. $\boxtimes$

<u>Příklady poloměrů konvergence.</u>

$\sum x^n$, $\sum (n^3-n^2+1)x^n$, $\sum \frac{x^n}{n^2}$ mají $R=1$

$\sum \frac{x^n}{n!}$ má $R=+\infty$, $\sum n!\,x^n$ má $R=0$.

Důsledky. Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr k. $R>0$.

- $\lim_{x\to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ pro každé $x_0 \in (-R,R)$.
- $\forall$ komp. interval $[a,b] \subset (-R,R)$ máme $\int_a^b \left(\sum_0^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$), speciálně má funkce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ na $(-R,R)$ primitivní funkci $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ (tato m. řada má poloměr k. též R).
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má na $(-R,R)$ derivaci rovnou $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ (opět poloměr k. rovný R).

Pozn. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má na $(-R,R)$ derivace $f', f'', f''', \ldots$ všech řádů, dané m. řadami.

$\boxed{\text{Věta 2.11}}$ (Abelova)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr k. R, $0<R<+\infty$, a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows$ na $[0,R]$ a $\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$.

D. Pro $x \in \underbrace{[0,R]}_{M}$ píšeme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n R^n}_{f_n(x)} \underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^n}_{g_n(x)}$.

Patrně $\sum f_n \rightrightarrows$ na M, protože takováto je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ a na x vůbec nezávisí. $x \in M \Rightarrow |g_n(x)| \leq 1$ a posloupnost $(g_n(x)) = ((x/R)^n)$ je nerostoucí. Podle Abelova kritéria (V. 2.8) tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \rightrightarrows$ na $[0,R]$. Proto

$$\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to R^-} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n. \boxtimes$$

V. 2.3, resp. V. 2.3$_r$

Příklad

$$\log 2 = \lim_{x\to 1^-} \log(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots,$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \log(1+x)$ pro $x \in (-1,1)$ a konverguje (Leibniz).