Přednáška 8, 20. listopadu 2019

Více o stejnoměrné konvergenci. Mooreova–Osgoodova věta 1 a 2. Změna pořadí operací limity a integrování/derivování (bez důkazů)

Stejnoměrná Bolzanova–Cauchyova podmínka. Základním výsledkem teorie limit reálných posloupností $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je ekvivalence

$$\exists\, a \in \mathbb{R} :\ \lim a_n = a \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ m,\, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$$

— posloupnost (a_n) konverguje, právě když je Cauchyova. Je to jedna z hlavních vět v *Matematické analýze I.* Zobecníme ji pro posloupnosti funkcí.

Tvrzení (stejnoměrná B.–C. podmínka). *Nechť $f_n \colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou reálné funkce definované na množině M. Pak*

$$\begin{aligned} &\exists\, f \colon M \to \mathbb{R} :\ f_n \rightrightarrows f \ \ (\text{na } M) \\ &\iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} :\ m,\, n \geq n_0,\ x \in M \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Na levé straně ekvivalence lze místo $f_n \rightrightarrows f$ (na M) psát $\lim f_n = f$, *s konvergencí v normě $\|\cdot\|_\infty$. Pravé straně ekvivalence se říká* stejnoměrná Bolzanova–Cauchyova podmínka.

Důkaz. Implikace $\Rightarrow$. Konvergují-li f_n na M stejnoměrně k f, vezmeme n_0 v $\mathbb{N}$, aby pro každé $n \geq n_0$ a každé $x \in M$ bylo $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak pro každé $m, n \geq n_0$ a $x \in M$ máme (podle Δ-ové nerovnosti)

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Posloupnost (f_n) tedy splňuje stejnoměrnou Bolzanovu–Cauchyovu podmínku.

Implikace $\Leftarrow$. Posloupnost funkcí $(f_n) \subset N$ je tedy Cauchyova posloupnost v (metrickém či normovaném) prostoru funkcí $(N, \|\cdot\|)$, kde $N = \{f \mid f \colon M \to \mathbb{R}$. Podle úlohy 6 v přednášce 6 to je úplný prostor. Tedy existuje funkce $f \in N$, že $\lim f_n = f$, a tak $f_n \rightrightarrows f$ (na M). □

Dává proto smysl značení $f_n \rightrightarrows$ (na M) či $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ (na M), že posloupnost $(f_n) \subset N$ splňuje na M stejnoměrnou Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, respektive ji splňuje lokálně, a tak stejnoměrně, respektive lokálně stejnoměrně, konverguje na M k nějaké funkci f.

Diniho věta. V některých situacích lze ze slabšího předpokladu jen bodové či jen lokálně stejnoměrné konvergence odvodit stejnoměrou konvergenci. Příklad takové situce uvádí úloha 8 v šesté přednášce. Tuto úlohu teď zobecníme.

Tvrzení (kompaktnost $\Rightarrow \rightrightarrows$). *Jsou-li funkce $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definované na kompaktním metrickém prostoru (M,d) a $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ (na M), potom i $f_n \rightrightarrows$ (na M).*

Důkaz. Pro každé $a \in M$ vezmeme kouli $B_a = B(a, r_a)$, $r_a > 0$, že $f_n \rightrightarrows$ (na B_a). Tyto koule pokrývají M, takže podle kompaktnosti pro nějakých konečně mnoho bodů $a_1, \dots, a_k \in M$ je

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} B_{a_i}\ .$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ nechť $n_i \in \mathbb{N}$ splňuje, že když $m, n \ge n_i$ a $x \in B_{a_i}$, tak $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Pro každé $m, n \ge \max_{1 \le i \le k} n_i$ a $x \in M$ pak též $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. □

Posloupnost funkcí $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a M je množina, je *monotónní*, když pro každé $a \in M$ je $f_1(a) \le f_2(a) \le \dots$ nebo pro každé $a \in M$ je $f_1(a) \ge f_1(a) \ge \dots$.

Věta (Diniho). *Nechť $f_n \to f$ (na M) pro monotónní posloupnost spojitých reálných funkcí f_n, $n \in \mathbb{N}$, a spojitou reálnou funkci f, které jsou všechny definované na kompaktním metrickém prostoru (M,d). Pak $f_n \rightrightarrows f$ (na M).*

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ a $n \in \mathbb{N}$ definujeme množiny

$$I_n = \{a \in M \mid |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon\}\ .$$

Díky spojitosti funkcí f_n a f jsou všechny množiny I_n otevřené a díky bodové konvergenci f_n k f pokrývají M. Díky kompaktnosti prostoru M existují indexy $n_1, \dots, n_k$, že $M = \bigcup_{i=1}^{k} I_{n_i}$. Díky monotonii posloupnosti (f_n) je $I_1 \subset I_2 \subset \dots$, takže $M = I_n$ pro každé $n \ge n_0 = \max(n_1, \dots, n_k)$. Pro každé $n \ge n_0$ a každé $x \in M = I_n$ je tedy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. □

Větu objevil italský matematik *Ulisse Dini (1845–1918)*, který působil na univerzitách města Pisa.

Mooreova–Osgoodova věta. Jak už dávno víme, změna pořadí limit může vést ke změně výsledku:

$$\lim_{x\to 1^-}\lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to 1^-} 0 = 0, \ \text{ ale } \ \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1^-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \ .$$

Dokážeme, že při stejnoměrné konvergenci se to stát nemůže. Větu neprve vyslovíme a dokážeme pro reálnou osu $M = \mathbb{R}$ a pak uvedeme její zobecnění pro jakoukoli množinu M. Připomeneme si označení prstencových okolí na reálné ose: když $\delta > 0$,

$$P(x_0,\, \delta) = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \ \text{ pro } \ x_0 \in \mathbb{R}\ ,$$

$$P(x_0,\, \delta) = (-\infty,\, -1/\delta) \ \text{ pro } \ x_0 = -\infty$$

a

$$P(x_0,\, \delta) = (1/\delta,\, +\infty) \ \text{ pro } \ x_0 = +\infty\ .$$

Věta (Mooreova–Osgoodova 1). *Nechť* $x_0 \in \mathbb{R}^*$ *(jsou povoleny i hodnoty* $x_0 = \pm\infty$*),* $\delta > 0$*,* $f_n, f\colon P(x_0,\delta) \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $f_n \rightrightarrows f$ *(na* $P(x_0,\delta)$*) a pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *existuje vlastní* $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$*. Pak existuje vlastní limita*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ \text{ a } \ \lim_{x\to x_0} f(x) = L\ .$$

Můžeme tak prohodit limity a máme rovnosti

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = L\ .$$

Důkaz. Protože $f_n \rightrightarrows$ (na $P(x_0,\delta)$), pro dané $\varepsilon > 0$ existuje index n_0, že

$$m,\, n \ge n_0,\, x \in P(x_0,\delta) \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ .$$

Pro pevné m a n limitní přechod $x \to x_0$ nerovnost zachová nebo ji změní v rovnost a

$$m,\, n \ge n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \le \varepsilon\ .$$

Tedy je $(a_n) \subset \mathbb{R}$ cauchyovská posloupnost a má tak $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in P(x_0,\delta)$ podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$|f(x) - L| \le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{A} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{B} + \underbrace{|a_n - L|}_{C}\ .$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolíme tak velké $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $x \in P(x_0, \delta)$ a $n = n_0$ je $A, C < \frac{\varepsilon}{3}$. Zvolíme $\delta_0 \in (0, \delta)$, že pro $n = n_0$ a každé $x \in P(x_0, \delta_0)$ je $B < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak

$$x \in P(x_0,\, \delta_0),\ n = n_0 \Rightarrow |f(x) - L| \le A + B + C < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\ .$$

Tedy $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. □

Věta je nazvána podle amerických matematiků *Eliakima Hastingse Moorea (1862–1932)* a *Williama Fogga Osgooda (1864–1943)*. S její pomocí můžeme znovu dokázat, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce. Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, a f jsou reálné funkce definované na okolí U bodu $a \in \mathbb{R}$, funkce f_n jsou spojité v a a $f_n \rightrightarrows f$ (na U). Pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(a) = f(a)$$

a tedy je f také spojitá v a (úloha 1).

Jak Mooreovu–Osgoodovu větu zobecnit pro funkce definované na jakékoli množině?[1] Pro množinu $M \neq \emptyset$ nazveme jakoukoli posloupnost

$$\mathcal{X} = (X_n) \subset \mathcal{P}(M),\ X_1 \supset X_2 \supset \dots\ ,$$

jejích vnořených neprázdných podmnožin (takže $\emptyset \neq X_n \subset M$) jejím *soustředným systémem*. Řekneme, že *funkce* $f\colon X_1 \to \mathbb{R}$ *má podle* $\mathcal{X}$ *limitu* $L \in \mathbb{R}$, psáno $\lim_{\mathcal{X}} f = L$, když

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}:\ x \in X_n \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

(je to totéž jako $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0:\ n \ge n_0, x \in X_n \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ — úloha 2).

Věta (Mooreova–Osgoodova 2). *$M \neq \emptyset$ buď množina, $\mathcal{X} = (X_n) \subset \mathcal{P}(M)$ buď její soustředný systém, $f_n, f\colon X_1 \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, buďte funkce s $f_n \rightrightarrows f$ (na X_1) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť existuje vlastní* $\lim_{\mathcal{X}} f_n = a_n \in \mathbb{R}$. *Pak existuje vlastní limita*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L \quad a \quad \lim_{\mathcal{X}} f = L\ .$$

Můžeme tak prohodit limity a máme rovnosti

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{\mathcal{X}} f_n = \lim_{\mathcal{X}} \lim_{n \to \infty} f_n = L\ .$$

[1] Toto zobecnění jsem na přednášce neuváděl.

Důkaz. Protože $f_n \rightrightarrows$ (na X_1), pro dané $\varepsilon > 0$ existuje index n_0, že

$$m,\, n \geq n_0,\, x \in X_1 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon\ .$$

Nechť $m, n \geq n_0$ jsou pevné. Podle definice limity podle $\mathcal{X}$ existují indexy $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, že $x \in X_{k_1} \Rightarrow |f_m(x) - a_m| < \varepsilon$ a $x \in X_{k_2} \Rightarrow |f_n(x) - a_n| < \varepsilon$. Pro $k_0 = \max(k_1, k_2)$ pak podle trojúhelníkové nerovnosti máme

$$\begin{aligned} x \in X_{k_0} \Rightarrow |a_m - a_n| &\leq |a_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je opět Cauchyova a má $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in X_1$ podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$|f(x) - L| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{A} + \underbrace{|f_n(x) - a_n|}_{B} + \underbrace{|a_n - L|}_{C}\ .$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolíme tak velké $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $x \in X_1$ a $n = n_0$ je $A, C < \frac{\varepsilon}{3}$ (což lze díky $f_n \rightrightarrows f$ (na X_1) a $a_n \to L$ pro $n \to \infty$). Zvolíme $k \in \mathbb{N}$, že pro $n = n_0$ a každé $x \in X_k$ je $B < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak

$$x \in X_k,\ n = n_0 \Rightarrow |f(x) - L| \leq A + B + C < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\ .$$

Tedy $\lim_{\mathcal{X}} f = L$. □

Tato věta patrně zobecňuje svou první verzi (úloha 5).

Změna pořadí operací limity a integrování/derivování. Z časových důvodů nebudeme odpovídající věty dokazovat.

Věta (výměna $\lim_{n\to\infty}$ a $\int$).[2] *Nechť $f_n, f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla a $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce, f_n jsou na $[a,b]$ riemannovsky integrovatelné a $f_n \rightrightarrows f$ (na $[a,b]$). Pak i f je na $[a,b]$ riemannovsky integrovatelná a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f\ .$$

[2] Existují lepší věty o záměně limity a (i riemannovské) integrace. Pokusím se je zde později doplnit.

Věta (výměna $\lim_{n\to\infty}$ a $\frac{d}{dx}$). *Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$ s $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou takové funkce, že (i) každá f_n má na (a,b) derivaci f_n', (ii) $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} g$ (na (a,b)) pro nějakou funkci $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ a (iii) existuje bod $c \in (a,b)$, že posloupnost $(f_n(c)) \subset \mathbb{R}$ konverguje. Potom*

$$f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad (\textit{na } (a,b))$$

pro nějakou funkci $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, která má na (a,b) derivaci rovnou $f' = g$.

Integrace funkce vylepšuje, z nespojitých se stávají spojité, ale derivování je naopak kazí, derivace spojité funkce může být nespojitá. Proto předpoklady poslední věty musejí zahrnovat posloupnost derivací (f_n') a ne posloupnost (f_n).

Uvedeme si tři příklady na poslední větu. Funkce

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \rightrightarrows 0$$

na $\mathbb{R}$, ale posloupnost jejich derivací $(\cos(nx))$ ani nekonverguje bodově pro mnohá čísla $x \in \mathbb{R}$ (úloha 3). Stejnoměrná konvergence (f_n) tedy nezaručuje konvergenci (f_n'). Funkce

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \rightrightarrows |x|$$

na $\mathbb{R}$ (úloha 4) a na $\mathbb{R}$ existují derivace $f_n'(x)$, ale limitní funkce $f(x) = |x|$ v 0 derivaci nemá. Stejnoměrná konvergence (f_n) k f tedy nezaručuje existenci f'. Konečně funkce $f_n(x) = n$ mají posloupnost derivací $(f_n') = (0)$, jež jistě stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$ k nulové funkci, ale původní posloupnost (f_n) nekonverguje ani bodově. Jsou tedy splněné předpoklady (i) a (ii), ale ne (iii), a závěr věty neplatí.

Úlohy

1. Vysvětlete, proč platí jednotlivé rovnosti výpočtu dokazujícího pomocí Mooreovy–Osgoodovy věty 1 spojitost stejnoměrné limity v bodě a.

2. Dokažte ekvivalenci dvou uvedených definic limity podle $\mathcal{X}$.

3. Nalezněte nějaké body $x \in \mathbb{R}$, v nichž $(\cos(nx))$ nekonverguje.

4. Dokažte, že $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \rightrightarrows |x|$ (na $\mathbb{R}$).

5. Vysvětlete, proč Mooreova–Osgoodova věta 2 zobecňuje Mooreovu–Osgoodovu větu 1.

6. Je pravda, že
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n \ ,$$
když $f_n(x) = nx(1-x)^n$?

7. Spočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1} x - \sin^n x)\, dx$$
a výpočet zdůvodněte.

8. Spočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + x/n)^n\, dx$$
a výpočet zdůvodněte.

9. Tato úloha už asi byla ve speciálním případu, ale přesto ji uvedeme obecně. Nechť $f_n \to f$ na M, ale $f_n \not\rightrightarrows f$ na M. Dokažte, že neexistuje vzhledem k inkluzi maximální množina $A \subset M$, že $f_n \rightrightarrows f$ na A.