

## Přednáška 8, 10. dubna 2013

*Důkaz.* Omezíme se na případ dvou proměnných  $x$  a  $y$  ( $m = 2$ ) a bod  $a = \bar{0} = (0, 0)$ , pro více proměnných se postupuje podobně. Rovněž můžeme předpokládat, že  $U \subset \mathbb{R}^2$  je koule (tedy otevřený kruh) se středem v počátku. Nechť  $h = (h_1, h_2) \in U$  a  $h' = (h_1, 0)$ . Přírůstek  $f(h) - f(\bar{0})$  napíšeme pomocí přírůstků ve směrech obou souřadnicových os:

$$f(h) - f(\bar{0}) = (f(h) - f(h')) + (f(h') - f(\bar{0})) .$$

Úsečky  $h'h$  a  $\bar{0}h'$  obě leží v  $U$ , funkce  $f$  je na nich definovaná a na první úsečce závisí pouze na proměnné  $y$  a na druhé jen na  $x$ . Pro obě úsečky a funkci  $f$  použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě (pro funkce jedné proměnné):

$$f(h) - f(\bar{0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\zeta_2) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_1) \cdot h_1 ,$$

kde  $\zeta_2$  (resp.  $\zeta_1$ ) je nějaký vnitřní bod úsečky  $h'h$  (resp.  $\bar{0}h'$ ). Body  $\zeta_1$  a  $\zeta_2$  leží v otevřené kouli  $B(\bar{0}, \|h\|)$ . Díky spojitosti obou parciálních derivací v počátku máme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\zeta_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) + \alpha(\zeta_2) \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\zeta_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) + \beta(\zeta_1) ,$$

kde  $\alpha(h)$  i  $\beta(h)$  je  $o(1)$  pro  $h \rightarrow \bar{0}$  (tj. pro každé  $\varepsilon > 0$  máme  $\delta > 0$ , že  $\|h\| < \delta \Rightarrow |\alpha(h)| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$  a totéž pro  $\beta(h)$ ). Tedy

$$f(h) - f(\bar{0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) \cdot h_1 + \alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1 .$$

Z trojúhelníkové nerovnosti a nerovností  $0 < \|\zeta_1\|, \|\zeta_2\| < \|h\|$  a  $|h_1|, |h_2| \leq \|h\|$  plyne, že když  $\|h\| < \delta$ , tak

$$|\alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1| \leq |\alpha(\zeta_2)| \cdot \|h\| + |\beta(\zeta_1)| \cdot \|h\| \leq 2\varepsilon\|h\| .$$

Tedy  $\alpha(\zeta_2)h_2 + \beta(\zeta_1)h_1 = o(\|h\|)$  pro  $h \rightarrow \bar{0}$ . Podle definice diferenciálu je funkce  $f$  diferencovatelná v počátku.  $\square$

Zobecníme Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkce více proměnných.

**Tvrzení (Lagrange pro funkce několika proměnných).** *Nechť  $U \subset \mathbb{R}^m$  je otevřená množina obsahující úsečku  $u = ab$  s koncovými body  $a$  a  $b$  a  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce, jež je spojitá v každém bodě  $u$  a má v každém vnitřním bodě  $u$  diferenciál. Pak pro nějaký vnitřní bod  $\zeta$  úsečky  $u$  platí, že*

$$f(b) - f(a) = Df(\zeta)(b - a) .$$

*Rozdíl hodnot funkce v krajních bodech úsečky se tedy rovná hodnotě jejího diferenciálu v nějakém vnitřním bodě úsečky na směrovém vektoru úsečky.*

*Důkaz.* Udělejte si jako cvičení, s pomocí funkce  $F(t) = f(a + t(b - a))$ , kde reálné číslo  $t$  probíhá interval  $[0, 1]$ .  $\square$

Otevřená množina  $D \subset \mathbb{R}^m$  je *souvislá*, když lze každé dva její body spojit lomenou čarou, jež celá leží v  $D$ . Příklady souvislých otevřených množin: koule v  $\mathbb{R}^m$ , celé  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^3 \setminus L$ , kde  $L$  je sjednocení konečně mnoha přímek. Na druhou stranu ale  $B \setminus R$ , kde  $B$  je otevřená koule v  $\mathbb{R}^3$  a  $R$  rovina protínající  $B$ , je otevřená avšak nikoli souvislá množina.

**Důsledek** ( $\partial = 0 \Rightarrow f \equiv \text{const.}$ ). *Má-li funkce  $m$  proměnných  $f$  v každém bodě otevřené a souvislé množiny  $U$  nulový diferenciál, je na  $U$  konstantní. Totéž platí, má-li  $f$  v každém bodě  $U$  nulovou každou parciální derivaci.*

*Důkaz.* Nechť  $U \subset \mathbb{R}^m$  je otevřená a souvislá množina a funkce  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  má na  $U$  nulový diferenciál. Vezmeme dva libovolné body  $a, b \in U$  a spojíme je lomenou čarou  $s = s_1 s_2 \dots s_r$  ležící v  $U$ . Pro libovolnou úsečku  $s_i = a_i b_i$  z  $s$  máme díky předchozímu tvrzení a předpokladu o  $f$ , že

$$f(a_i) - f(b_i) = Df(\zeta)(a_i - b_i) = 0$$

( $\zeta$  je nějaký vnitřní bod  $s_i$ ), tedy  $f(a_i) = f(b_i)$ . Hodnoty funkce  $f$  na koncích všech úseček  $s_i$  se rovnají a tedy  $f(a) = f(b)$ .

Má-li  $f$  v každém bodě  $U$  nulovou každou parciální derivaci, je podle tvrzení z minulé přednášky v každém bodě  $U$  diferencovatelná a (podle vyjádření diferenciálu pomocí parciálních derivací) její diferenciál je vždy nulový, čímž jsme v předchozí situaci.  $\square$

**Počítání s parciálními derivacemi a diferenciály.** Pro dvě funkce  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , které jsou definované na okolí  $U \subset \mathbb{R}^m$  bodu  $a \in U$  a mají v bodě  $a$  parciální derivaci podle proměnné  $x_i$ , máme pro parciální derivaci podle

$x_i$  jejich lineární kombinace, součinu a podílu stejné vzorce jako v případě funkcí jedné proměnné (místo  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  píšeme stručně  $\partial_i f$ ):

$$\begin{aligned}\partial_i(\alpha f + \beta g)(a) &= \alpha \partial_i f(a) + \beta \partial_i g(a) \\ \partial_i(fg)(a) &= g(a) \partial_i f(a) + f(a) \partial_i g(a) \\ \partial_i(f/g)(a) &= \frac{g(a) \partial_i f(a) - f(a) \partial_i g(a)}{g(a)^2} \quad (\text{pokud } g(a) \neq 0) .\end{aligned}$$

Tyto vzorce jsou fakticky vzorce pro funkce jedné proměnné, protože  $\partial_i$  se počítá z funkce závisující jen na  $x_i$ . Podobně pro diferenciály:

**Tvrzení (počítání s diferenciály).** *Nechť  $U \subset \mathbb{R}^m$  je okolí bodu  $a$  a  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  jsou dvě funkce, obě diferencovatelné v  $a$ .*

1. *Když  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , pak i funkce  $\alpha f + \beta g$  je v  $a$  diferencovatelná a*

$$D(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha Df(a) + \beta Dg(a) .$$

2. *Součinnová funkce  $fg$  je též diferencovatelná v  $a$  a*

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a) .$$

3. *Když  $g(a) \neq 0$ , je i podílová funkce  $f/g$  diferencovatelná v  $a$  a*

$$D(f/g)(a) = \frac{1}{g(a)^2} \left( g(a)Df(a) - f(a)Dg(a) \right) .$$

*Všimněme si, že výsledný diferenciál je vždy lineární kombinace diferenciálů funkcí  $f$  a  $g$ .*

*Důkaz.* Tyto vzorce plynou z analogických vzorců pro parciální derivace a z vyjádření diferenciálu pomocí parciálních derivací.  $\square$

Vzorec pro diferenciál lineární kombinace v části 1 platí obecněji i pro zobrazení  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Zobecníme vzorec pro derivaci složené funkce na obecný případ skládání zobrazení. V následující větě budeme skládání funkcí a zobrazení zapisovat v pořadí zprava doleva podle pořadí aplikace:  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

**Věta (diferenciál složeného zobrazení).** *Nechť*

$$f : U \rightarrow V, \quad g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$$

jsou dvě zobrazení, kde  $U \subset \mathbb{R}^m$  je okolí bodu  $a$  a  $V \subset \mathbb{R}^n$  je okolí bodu  $b = f(a)$ . Je-li zobrazení  $f$  diferencovatelné v  $a$  a  $g$  je diferencovatelné v  $b$ , je složené zobrazení

$$g \circ f = g(f) : U \rightarrow \mathbb{R}^k$$

diferencovatelné v  $a$  a jeho diferenciál se rovná složenině diferenciálů zobrazení  $f$  a  $g$ :

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b) \circ Df(a) .$$

Než se pustíme do důkazu, připomeneme význam symbolů  $o(h)$  a  $O(h)$  a explicitně uvedeme jejich jednoduché vlastnosti, které v důkazu využijeme.

Pro zobrazení  $z : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kde  $U \subset \mathbb{R}^m$  je okolí počátku, budeme psát stručně  $z(x) = o(x)$  místo  $\|z(x)\| = o(\|x\|)$  a  $z(x) = O(x)$  místo  $\|z(x)\| = O(\|x\|)$ , vždy  $x \rightarrow \bar{0}$ . Připomeňme si, že značení  $z(x) = o(x)$  je zkratka pro

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| \leq \varepsilon \|x\|$$

(to jest  $\|z(x)\|/\|x\| \rightarrow 0$  pro  $x \rightarrow \bar{0}$ ) a  $z(x) = O(x)$  je zkratka pro

$$\exists c > 0 \exists \delta > 0 : \|x\| < \delta \Rightarrow \|z(x)\| \leq c \|x\|$$

(to jest podíl  $\|z(x)\|/\|x\|$  je v prstencovém okolí  $\bar{0}$  omezený).

**Lemma.** *Nechť  $z_1, z_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kde  $U \subset \mathbb{R}^m$  je okolí počátku, jsou dvě zobrazení. Nechť  $u : U \rightarrow V$  a  $v : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  jsou dvě zobrazení, přičemž  $U \subset \mathbb{R}^m$  a  $V \subset \mathbb{R}^n$  jsou okolí počátků souřadnic. V následujících tvrzeních  $x \rightarrow \bar{0}$ .*

1. *Když je  $z_1$  lineární zobrazení, potom  $z_1(x) = O(x)$ .*
2. *Když  $z_1(x) = o(x)$  a  $z_2(x) = o(x)$ , potom  $z_1(x) + z_2(x) = o(x)$ .*
3. *Když  $z_1(x) = o(x)$  a  $z_2(x) = O(x)$ , potom  $z_1(x) + z_2(x) = O(x)$ .*
4. *Pokud  $u(x) = o(x)$  a  $v = O(x)$ , pak  $v(u(x)) = o(x)$ .*
5. *Pokud  $u(x) = O(x)$  a  $v(x) = o(x)$ , pak  $v(u(x)) = o(x)$ .*

*Důkaz.* Cvičení.

□

**Důkaz věty.** V okolí počátků souřadnic máme aproximace

$$g(b+h) = g(b) + Dg(b)(h) + \gamma(h) \quad \text{a} \quad f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \beta(h),$$

kde  $\gamma(h) = o(h)$  a  $\beta(h) = o(h)$ . Rozdíl  $f(a+h) - f(a)$  si označíme jako  $\Delta(h)$ . Pak  $f(a+h) = f(a) + \Delta(h) = b + \Delta(h)$  a  $\Delta(h) = Df(a)(h) + \beta(h)$ . Takže

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) &= g(f(a+h)) - g(f(a)) \\ (\text{diferencovatelnost } f \text{ v } a) &= g(b + \Delta(h)) - g(b) \\ (\text{diferencovatelnost } g \text{ v } b) &= Dg(b)(\Delta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\ (\text{linearita } Dg) &= Dg(b)(Df(a)(h)) + Dg(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)) \\ &= (Dg(b) \circ Df(a))(h) + \alpha(h), \end{aligned}$$

kde

$$\alpha(h) = Dg(b)(\beta(h)) + \gamma(\Delta(h)) = Dg(b)(\beta(h)) + \gamma(Df(a)(h) + \beta(h)).$$

Zbývá ukázat, že pro  $h \rightarrow \bar{0}$  je  $\alpha(h) = o(h)$ . První sčítanec ve vyjádření  $\alpha(h)$  je  $o(h)$  podle částí 1 a 4 lemmatu (lineární, tedy  $O$ , zobrazení složené s  $o$  dává  $o$ ) a druhý je rovněž  $o(h)$  podle částí 1, 3 a 5 ( $o$  zobrazení složené se součtem  $O$  a  $o$  je  $o$  složené s  $O$  a tedy  $o$ ). Celkem  $\alpha(h) = o(h)$  podle části 2. Takže  $g \circ f$  má v  $a$  diferenciál rovný lineárnímu zobrazení  $Dg(b) \circ Df(a)$ . □