8. přednáška z MA II, 5. 4. 2007

$\boxed{\text{Věta 2.4}}$ (záměna pořadí $\lim\limits_{n\to\infty}$ a $\int$)

Nechť $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$, $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Potom i $f \in \mathcal{R}[a,b]$ a $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

D. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Díky $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$ pro každé $x \in [a,b]$.

Nechť $D = a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = b$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Pro $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ máme nerovnosti ($n > n_0$)

$$\inf_{I_i} f_n - \varepsilon \leq \inf_{I_i} f, \quad \sup_{I_i} f \leq \sup_{I_i} f_n + \varepsilon.$$ Protože

$\varepsilon(|I_0| + |I_1| + \cdots + |I_{k-1}|) = \varepsilon(b-a)$, máme

$$s(f_n, D) - \varepsilon(b-a) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \inf_{I_i} f_n - \varepsilon(b-a) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \left(\inf_{I_i} f_n - \varepsilon\right) \leq \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \inf_{I_i} f = s(f, D).$$

Takže $s(f_n, D) - \varepsilon(b-a) \leq s(f, D)$ a podobně se dokáže, že $S(f, D) \leq S(f_n, D) + \varepsilon(b-a)$, tyto nerovnosti platí pro každé $n > n_0$ a každé dělení D.

Fixujeme $n > n_0$ a vezmeme dělení D_0 takové, že $\underline{0 \leq S(f_n, D_0) - s(f_n, D_0) < \varepsilon}$, což lze díky integrovatelnosti f_n. Pro toto dělení D_0 pak máme

$$0 \leq S(f, D_0) - s(f, D_0) \leq S(f_n, D_0) + \varepsilon(b-a) -$$

$$-\left(s(f_n, D_0) - \varepsilon(b-a)\right) = S(f_n, D_0) - s(f_n, D_0) + 2\varepsilon(b-a)$$

$$< \varepsilon(2(b-a)+1).$$ Tedy

$\forall \varepsilon > 0\ \exists D$, že $0 \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$, což podle věty ze ZS dává $f \in R[a,b]$.

Protože $s(f_n, D_0) \leq \int_a^b f_n \leq S(f_n, D_0)$, máme i

$$\int_a^b f \geq s(f, D_0) \geq s(f_n, D_0) - \varepsilon(b-a) \geq \int_a^b f_n - \varepsilon - \varepsilon(b-a) = \int_a^b f_n - \varepsilon(b-a+1)$$

a podobně $\int_a^b f \leq \int_a^b f_n + \varepsilon(b-a+1)$.

Pro $n > n_0$ tedy $\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| < \varepsilon(b-a+1)$, čili $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$.

$\boxtimes$

Než se pustím do záměny pořadí $\lim\limits_{n\to\infty}$ a derivování, podívejme se na tyto příklady:

- $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, $M = \mathbb{R}$. Patrně $f_n \rightrightarrows \equiv 0$ na M, ale posloupnost derivací $f_n'(x) = \cos(nx)$ nekonverguje ani bodově např. v $x = \pi$ $(3\pi, 5\pi, \dots)$.
- $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$, $M = [-1, 1]$. Protože

$f_n(x) \le |x| + 1/n$, $\quad |f_n(x) - |x|| \le 1/n$ na M, takže
$|x|$

$$f_n \rightrightarrows |x| \text{ na } M.$$

Funkce $f(x) = |x|$ ale nemá v 0 derivaci, i když každá f_n má derivaci na celém M.

I stejnoměrná konvergence f_n tedy neříká nic o konvergenci derivací f_n' — (f_n') nemusí konvergovat ani bodově nebo f_n mohou konvergovat k funkci, která nemá derivaci. Uvidíme ale, že naopak stejnoměrná konvergence f_n' zaručuje stejnoměrnou konvergenci f_n. Ale:

- $f_n(x) = n$ (konstanta), $M = \mathbb{R}$. Pak $f_n' \rightrightarrows \equiv 0$ na M, ale $f_n \not\to$ (nekonvergují ani bodově).

$\boxed{\text{Věta 2.5}}$ (záměna pořadí $\lim\limits_{n\to\infty}$ a derivování)

Nechť $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, kde $-\infty < a < b < +\infty$ (pracujeme na omezeném otevřeném intervalu), f_n' je vlastní na (a,b), $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na (a,b), $(f_n(t_0))_{n\geq 1}$ konverguje pro nějaký bod $t_0 \in (a,b)$.

Potom $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ pro nějakou funkci $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $f' = g$ na (a,b).

Důkaz. a) Nejprve dokážeme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b). Nechť $x_1 \in (a,b)$ je libovolný bod. Máme nalézt jeho okolí U, že $f_n \rightrightarrows$ na $U \cap (a,b)$. Zřejmě stačí dokázat, že $f_n \rightrightarrows$ na $[c,d]$ pro libovolný interval $[c,d] \subset (a,b)$ obsahující „záchytný" bod x_0; takový interval $[c,d]$ lze totiž zvolit tak, že oba body x_0 a x_1 leží v (c,d), tudíž $U = (c,d)$.

Nechť tedy $[c,d] \subset (a,b)$ splňuje $t_0, x_1 \in (c,d)$. Ověříme, že (f_n) na $[c,d]$ splňuje B.-C. podmínku (viz T. 2.1). Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a $t \in [c,d]$ máme nerovnost

$$|f_m(x)-f_n(x)| \leq \underbrace{|f_m(x)-f_n(x)-(f_m(x_0)-f_n(x_0))|}_{V_1} + \underbrace{|f_m(x_0)-f_n(x_0)|}_{V_2}.$$

Protože $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$ konverguje, pro dané $\varepsilon>0$ máme n_0, že $m, n>n_0 \Rightarrow V_2<\varepsilon$. Výraz V_1 odhadneme Lagr. větou o stř. hodnotě použitou na funkci $f_m(x)-f_n(x)$ na intervalu s krajními body x_0 a x:

$$V_1 = |(x-x_0)\cdot(f_m-f_n)'(\xi)| = |x-x_0|\cdot|f_m'(\xi)-f_n'(\xi)|,$$

kde ξ leží mezi body x a x_0 (ξ závisí obecně na x, m, n, ale to nám díky $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ nevadí). Protože $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b), máme $f_n' \rightrightarrows$ na $[c,d]$ (V. 2.2 a) a (f_n') splňuje B.-C. p. (T. 2.1). Existuje tedy n_1, že pro každé $m, n>n_1$ a každé $x\in[c,d]$ platí $|f_m'(x)-f_n'(x)|<\varepsilon$.

Takže $V_1<(d-c)\varepsilon \leq (b-a)\varepsilon$ $(\forall m,n>n_1\ \forall x\in[c,d])$

Celkem pro $m,n>\max(n_0,n_1)$ a $x\in[c,d]$ máme

$$|f_m(x)-f_n(x)| \leq V_1+V_2 < (b-a)\varepsilon+\varepsilon = (b-a+1)\varepsilon$$

a posloupnost (f_n) tak na $[c,d]$ splňuje (stejnoměrnou) B.-C. p. <u>Tedy $f_n \rightrightarrows$ na $[c,d]$.</u> Máme tedy funkci $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b).

---

b) Nyní dokážeme, že pro každý bod $x_1 \in (a,b)$ platí rovnost $f'(x_1) = g(x_1)$.

Použijeme V. 2.3: $f'(x_1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ V.\,2.3}}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} \frac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n'(x_1) = g(x_1).$$

Ověříme nyní předpoklady V. 2.3 v tomto případě. Aplikujeme ji na posloupnost funkcí $(g_n(h))_{n\geq 1}$, kde $g_n(h) = \dfrac{f_n(x_1+h)-f_n(x_1)}{h} : P(0,\delta) \to \mathbb{R}$ pro nějaké pevné $\delta > 0$.

(x_1 je pevné, h je proměnná)

Máme $\lim\limits_{h\to 0} g_n(h) = f_n'(x_1)$ pro $n = 1,2,\ldots$ Zbývá ověřit, že $g_n(h) \rightrightarrows$ na $P(0,\delta)$. (Podle a) víme, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows}$ na (a,b), ale to nám nestačí – h je ve jmenovateli).

Pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ a každé $h \in P(0,\delta)$ máme

$$|g_m(h) - g_n(h)| = \frac{1}{|h|}\left|\left(f_m(x_1+h) - f_n(x_1+h)\right) - \left(f_m(x_1) - f_n(x_1)\right)\right| = \frac{1}{\cancel{|h|}} \cdot \cancel{|h|} \cdot |f_m'(\lambda) - f_n'(\lambda)|,$$

Lagrange na funkci $f_m - f_n$ na intervalu s krajními body x_1 a x_1+h

---

kde λ leží mezi x_1 a x_1+h. Protože $f_n' \rightrightarrows$ na nějakém okolí bodu x_1, pro dané $\varepsilon > 0$ máme n_0, že $m, n > n_0$, $h \in P(0,\delta')$ (pro nějaké dost malé $0 < \delta' < \delta$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |g_m(h) - g_n(h)| = |f_m'(\lambda) - f_n'(\lambda)| < \varepsilon$.

Tedy $(g_n(h))_{n \geq 1}$ splňuje na $P(0,\delta')$ B.-C. p. a předpoklady V.2.3 jsou splněny (T.2.1)

$\boxtimes$

__Poznámka__ Pokud ~~$\not\!\!\!=$~~-dokonce $f_n' \rightrightarrows g$ na (a,b), můžeme místo na $[c,d]$ pracovat na celém intervalu (a,b) a dostáváme silnější závěr, že i $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b).

~~Podívejme se teď na mocninné řady funkcí~~

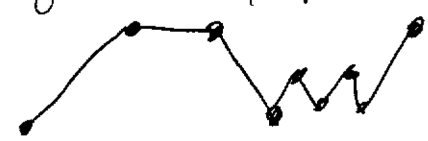
Věta 2.6 (Weierstrassova o aproximaci polynomy)

Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $[a,b]$ je kompaktní interval. Pak $p_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro nějakou posloupnost polynomů. Jinak řečeno,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ polynom $p(x)$, že $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in [a,b]$.

D. Nebudeme dělat. ⊠

Cvičení 11 Dokažte tuto větu pro posloupnost (l_n) po částech lineárních (spojitých) funkcí, tj. místo polynomů máme funkce typu



(lomená čára)

Podívejme se nyní na řady funkcí

$f_n, f : M \to \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ chápeme jako posloupnost částečných součtů $(s_n)_{n \geq 1} = (f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \ldots)$.

Takže $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na M znamená, že

$s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n \rightrightarrows f$ na M. Stejně pro bodovou a lokálně stejnoměrnou konvergenci. Uveďme si verze předchozích vět pro řady.

Věta 2.3ř $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)$,

za předpokladů: $f_n : P(x_0,\delta)\to\mathbb{R}$ pro nějaké $\delta>0$, pro každé $n\in\mathbb{N}$ ex. vlastní $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $P(x_0,\delta)$.

D. Plyne z V. 2.3. $\boxtimes$

Věta 2.4ř $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, za předpokladů:

$f_n\in\mathcal{R}[a,b]\ \forall n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na $[a,b]$.

D. Plyne z V. 2.4. $\boxtimes$

Věta 2.5ř $-\infty<a<b<+\infty$, $f_n:(a,b)\to\mathbb{R}$, f_n' jsou vlastní na (a,b), $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} g$ na (a,b), $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje pro nějaké $x_0\in(a,b)$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) pro nějakou f a $f'=g$ na (a,b).

D. Plyne z V. 2.5.

Pozn. Z $\sum f_n' \rightrightarrows g$ na (a,b) plyne opět $\sum f_n \rightrightarrows f$ –"–. $\boxtimes$

$\boxed{\text{Věta 2.7}}$ (kritéria stejn. konvergence řad)

a) (Weierstrassův test) Nechť $f_n : M \to \mathbb{R}$ jsou takové funkce, že řada čísel (nezáporných)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |f_n(x)|$$
konverguje. Potom
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows \text{ na } M.$$

b) (Dini) Jsou-li funkce $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojité a nezáporné, $[a,b]$ je kompaktní a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$ na $[a,b]$, kde f je též spojitá, potom $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

Důkaz. a) z V. 2.1, b) z V. 2.2.b, podrobněji příště.