Přednáška 7, 13. listopadu 2019

Důkaz existence spojité funkce bez derivace

Budeme tedy dokazovat následující

Větu (spojitá funkce bez derivace). *Existuje taková funkce $f \in \mathrm{C}[0,1]$, že pro každé $x \in [0,1]$ a každé $\delta > 0$ je*

$$\sup\left(\left\{\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \;\middle|\; y \in P(x,\,\delta) \cap [0,\,1]\right\}\right) = +\infty\ .$$

Tato funkce je samozřejmě spojitá, ale není diferencovatelná v žádném bodě intervalu $[0,1]$.

Diferencovatelnost funkce v daném bodě znamená existenci vlastní derivace, v krajním bodu intervalu jednostranné, a $P(x,\delta) = (x-\delta, x) \cup (x, x+\delta)$. Větu dokážeme pomocí čtyř lemmat.

Lemma 1. *Funkce $f \in \mathrm{C}[0,1]$ má vlastnost uvedenou ve větě, má-li vlastnost, že pro každé $x \in [0,1]$ je*

$$\sup\left(\left\{\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \;\middle|\; y \in [0,\,1] \setminus \{x\}\right\}\right) = +\infty\ .$$

Parametr δ ve větě tedy je nepodstatný.

Důkaz. Předpokládáme, že f má pro každé x v $[0,1]$ tuto vlastnost. Pro každé $x \in [0,1]$ a každé $\delta > 0$ je množina

$$Q(x,\,\delta) = [0,\,1] \setminus U(x,\,\delta) \;\; (U(x,\,\delta) = (x-\delta,\,x+\delta))$$

kompaktní (úloha 1) a jako $M_{x,\delta}$ označíme maximum spojité funkce $g(y) = |(f(y)-f(x))/(y-x)|$ na ní. Pro dané $x \in [0,1]$ a $\delta > 0$ a každé $c > M_{x,\delta}$ podle předpokladu existuje y v $[0,1]$ různé od x, že

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| > c\ .$$

Pak ale $y \notin Q(x,\delta)$, tudíž $y \in U(x,\delta)$ a tedy $y \in P(x,\delta)$ $(y \neq x)$, a vidíme, že f má vlastnost uvedenou ve větě. □

Lemma 2. *Nechť (M,d) je metrický prostor, $(x_n) \subset M$ je posloupnost bodů konvergující k bodu $x_0 \in M$ a $f_n\colon M \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost funkcí konvergující v normě $\|\cdot\|_\infty$ ke spojité funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak*

$$\lim f_n(x_n) = f(x_0)\ .$$

Důkaz. Podle trojúhelníkové nerovnosti je

$$|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)|\ .$$

První absolutní hodnota vpravo je $< \varepsilon/2$, jakmile $n > n_0$, díky předpokladu, že $\|f - f_n\| \to 0$. Totéž platí i pro druhou absolutní hodnotu, jakmile $n > n_1$, díky spojitosti f v x_0 (Heineho definice spojitosti). Tedy $|f_n(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro $n \geq \max(n_0, n_1)$. $\square$

Heineho definice spojitosti říká, že pro funkci f spojitou v bodě a z $\lim a_n = a$ plyne $\lim f(a_n) = f(a)$. Předchozí lemma je jejím jistým zobecněním.

Lomené čáry. Dvě následující lemmata, či přesněji jejich důkazy, používají lomené čáry. *Lomená čára proložená body* (a_0, b_0), $(a_1, b_1), \ldots$ až (a_k, b_k) v rovině (v tomto pořadí), kde $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$, je funkce $f\colon [a_0, a_k] \to \mathbb{R}$ definovaná na každém intervalu $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, jako

$$f(x) = \frac{(b_i - b_{i-1})(x - a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} + b_{i-1}\ .$$

Její graf na intervalu $[a_{i-1}, a_i]$ představuje úsečka spojující body (a_{i-1}, b_{i-1}) a (a_i, b_i). Těmto úsečkám říkáme *úseky* dané lomené čáry. Lomená čára je spojitá funkce (úloha 9).

Sklon přímky v rovině dané rovnicí $y = ax + b$ je číslo a. Sklonem úsečky rozumíme sklon přímky, která ji prodlužuje. *Sečnou* dané funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, rozumíme přímku jdoucí dvěma různými body grafu f.

Lemma 3. *Pro každé $\varepsilon > 0$ a každou $f \in \mathrm{C}[0,1]$ existuje $g \in \mathrm{C}[0,1]$ a reálné $M > 0$, že $\|f - g\| < \varepsilon$ a pro každé dva různé body x a y z $[0,1]$ je*

$$\left|\frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right| < M\ .$$

Každou spojitou funkci na $[0,1]$ lze tedy aproximovat libovolně těsně spojitou funkcí s omezenými sklony sečen.

Důkaz. Protože interval $[0,1]$ je kompaktní, je funkce f stejnoměrně spojitá (úloha 2) a pro každé dostatečně velké $m \in \mathbb{N}$ a každé $i = 0, 1, \ldots, m$ tak platí implikace

$$\frac{i}{m} \le x \le \frac{i+1}{m} \Rightarrow |f(i/m) - f(x)|,\ |f((i+1)/m) - f(x)| < \varepsilon/2\ .$$

Body $(i/m, f(i/m))$, $i = 0, 1, \ldots, m$, proložíme lomenou čáru g. Ta rovněž splňuje tuto implikaci a dokonce pro táž m (úloha 3), takže pro každé x z $[0,1]$ je $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ (úloha 4) a g má první vlastnost. Protože pro každá dvě různá čísla x a y z $[0,1]$ je

$$\left|\frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right| \le s\ ,$$

kde s je v absolutní hodnotě největší sklon úseku lomené čáry g (úloha 5), má tato i druhou vlastnost. $\square$

Lemma 4. *Pro každé malé $\varepsilon > 0$ a každé velké $T > 0$ existuje $g \in \mathrm{C}[0,1]$, že $\|g\| < \varepsilon$ a pro každé $x \in [0,1]$ existuje $y \in [0,1]$ různé od x, že*

$$\left|\frac{g(y) - g(x)}{y - x}\right| > T\ .$$

Existují tedy spojité a malé funkce, definované na $[0,1]$, že každým bodem jejich grafu vede sečna s velkým sklonem.

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ a $T > 0$ zvolíme tak velké sudé $m \in \mathbb{N}$, že $2m\varepsilon/3 > T$, a $m+1$ body v rovině

$$\big(i/m,\ (\varepsilon/3)(1 - (-1)^i)\big),\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ m\ ,$$

proložíme lomenou čáru g. Ta začíná v bodu $(0,0)$ a končí v $(1,0)$ a skládá se z $m/2$ špiček s výškou $2\varepsilon/3$ a šířkou základen $2/m$. Tedy $\|g\| = 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. Libovolně daným bodem u grafu lomené čáry g vedeme sečnu prodlužující úsek g obsahující u (jsou-li tyto úseky dva, jeden si vybereme). Ta má v absolutní hodnotě sklon větší než T, protože obě strany každé špičky mají v absolutní hodnotě sklon $(2\varepsilon/3)/(1/m) = 2m\varepsilon/3 > T$. $\square$

Důkaz věty. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme množiny

$$A_n = \{f \in \mathrm{C}[0,\ 1] \mid \exists x \in [0,\ 1]\ \forall y \in [0,\ 1] \setminus \{x\} :\ |\tfrac{f(y)-f(x)}{y-x}| \le n\}\ .$$

Pokud dokážeme, že každá množina A_n je řídká podmnožina $\mathrm{C}[0,1]$, budeme hotovi. Protože prostor $\mathrm{C}[0,1]$ je úplný (podle tvrzení v minulé přednášce), existuje podle Baireovy věty funkce

$$f \in \mathrm{C}[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \ .$$

Zřejmě je f spojitá funkce definovaná na $[0,1]$, která neleží ani v jedné z množin A_n. Má tedy vlatnost popsanou v lemmatu 1 a tedy vlastnost ve větě a tedy není v žádném bodu intervalu $[0,1]$ diferencovatelná.

Dokážeme, že každá množina $A_n \subset \mathrm{C}[0,1]$ je uzavřená a neobsahuje žádnou kouli, tedy pro každou kouli $B(f,r) \subset \mathrm{C}[0,1]$ je $B(f,r) \not\subset A_n$. Z toho plyne, že A_n je řídká (úloha 6). Uzavřenost A_n dokážeme pomocí uzavřenosti na limity. Nechť $(f_k) \subset A_n$ je posloupnost prvků v A_n s $\lim_{k\to\infty} f_k = f \in \mathrm{C}[0,1]$ (tedy $f_k \rightrightarrows f$ na $[0,1]$, dokážeme, že i $f \in A_n$). Protože $f_k \in A_n$, existuje číslo $x_k \in [0,1]$, že pro každé $y \in [0,1]$ různé od x_k je $|\frac{f_k(y)-f_k(x_k)}{y-x_k}| \le n$. Podle věty z *Matematické analýzy I* má posloupnost $(x_k) \subset [0,1]$ konvergentní podposloupnost s limitou v $[0,1]$. Pro jednoduchost značení předpokládejme, že již $\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \in [0,1]$. Pro jakékoli $y \in [0,1]$ různé od x_0 pak vzhledem k vlastnosti bodu x_k a k lemmatu 2 máme

$$n \ge \lim_{k\to\infty} \left| \frac{f_k(y) - f_k(x_k)}{y - x_k} \right| = \left| \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \right| \ ,$$

protože neostrá nerovnost se v limitě zachová. Číslo x_0 tedy dosvědčuje, že $f \in A_n$ a A_n je uzavřená.

Zbývá v dané kouli $B(f,r) \subset \mathrm{C}[0,1]$ najít bod (tj. funkci) g mimo A_n. Funkci g definujeme jako $g = g_1 + g_2$, kde g_i nalezneme podle lemmat 3 a 4. Nejprve podle lemmatu 3 vezmeme funkci $g_1 \in \mathrm{C}[0,1]$ a konstantu $M > 0$, že $\|f - g_1\| < r/2$ a všechny sečny g_1 mají v absolutní hodnotě sklon $< M$. Pak podle lemmatu 4 vezmeme funkci $g_2 \in \mathrm{C}[0,1]$, že $\|g_2\| < r/2$ a každým bodem grafu g_2 vede sečna se sklonem v absolutní hodnotě více než $M + n$. Podle trojúhelníkové nerovnosti je $\|f-g\| \le \|f-g_1\| + \|g_2\| < r/2 + r/2 = r$, takže $g \in B(f,r)$. Nechť $x \in [0,1]$ je libovolné. Podle vlastnosti funkce g_2

vezmeme $y \in [0,1] \setminus \{x\}$, že $|(g_2(y) - g_2(x))/(y-x)| > M + n$. Pak

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(y)-g(x)}{y-x}\right| &= \left|\frac{g_2(y)-g_2(x)}{y-x} + \frac{g_1(y)-g_1(x)}{y-x}\right| \\
&\geq \left|\frac{g_2(y)-g_2(x)}{y-x}\right| - \left|\frac{g_1(y)-g_1(x)}{y-x}\right| \\
&> (M+n) - M = n\,,
\end{aligned}$$

takže $g \notin A_n$. Na prvním řádku jsme použili definici funkce g, na druhém nerovnost z úlohy 7 a na třetím vlastnosti funkcí g_1 a g_2. $\square$

Úlohy

1. Proč je pro $x \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ množina $[0,1] \setminus U(x,\delta)$ kompaktní?

2. Nechť (M,d) je kompaktní metrický prostor a $f\colon M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Dokažte, že f je stejnoměrně spojitá (tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : d(a,b) < \delta \Rightarrow |f(a) - f(b)| < \varepsilon$).

3. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je lineární funkce. Ukažte, že pro každé $x \in [a,b]$ je $\min(f(a), f(b)) \leq f(x) \leq \max(f(a), f(b))$.

4. Necht $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jsou funkce, $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k = 1$ je dělení intervalu $[0,1]$, $f(a_i) = g(a_i)$, funkce f splňuje $a_{i-1} \leq x \leq a_i \Rightarrow |f(x) - f(a_{i-1})|, |f(x) - f(a_i)| < \varepsilon$ a totéž splňuje funkce g. Dokažte, že pak pro každé $x \in [0,1]$ je $|f(x) - g(x)| < 2\varepsilon$.

5. Nechť $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je lomená čára a $S = \max|s|$, bráno přes všechny sklony s jejích úseků. Dokažte, že pak sklon t každé sečny funkce f splňuje nerovnost $|t| \leq S$.

6. Dokažte, že každá uzavřená množina v metrickém prostoru, jež má prázdný vnitřek (tj. neobsahuje žádnou kouli), je řídká.

7. Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla a a b je $|a+b| \geq |a| - |b|$.

8. Určete podmnožiny definičních oborů, na nichž následující posloupnosti funkcí konvergují bodově, stejnoměrně a lokálně stejnoměrně. Jaké jsou limitní funkce?

(a) $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ na $\mathbb{R}$.

(b) $f_n(x) = x^n - x^{3n}$ na $[0, 1]$.

(c) $f_n(x) = x^{n+1} - x^{n-1}$ na $[0, 1]$.

(d) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $\mathbb{R}$.

9. Proč je lomená čára spojitá funkce?