7. přednáška z MA II, 29. 3. 2007

② Posloupnosti a řady funkcí

V dalším vždy $f_n, f: M \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ jsou nějaké funkce definované na množině $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Co to znamená, že $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ nebo, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$?

<u>bodová konvergence</u>: $f_n \to f$ na M, když $\forall x \in M$ máme $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, to jest

$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in M\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, že $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

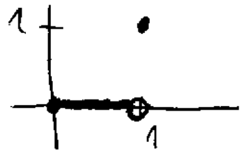
<u>stejnoměrná konvergence</u>: $f_n \rightrightarrows f$ na M, když

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0, x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

V b. konvergenci ~~[illegible]~~ pro dané $\varepsilon > 0$ může n_0 záviset na x, ale ~~po~~ ve s. konvergenci n_0 na x záviset nesmí, pro dané $\varepsilon > 0$ musí jediné n_0 fungovat pro všechny $x \in M$.

<u>lokálně stejnoměrná konvergence</u>: $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M, když $\forall x \in M$ má okolí $U = (x - \delta, x + \delta)$, kde $\delta > 0$ může záviset na x, že $f_n \rightrightarrows f$ na $U \cap M$.

Nejsilnější z těchto pojmů je s. konvergence, l. s. konvergence je prostřední a b. konvergence je nejslabší: $f_n \rightrightarrows f$ na M $\Longrightarrow$ $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M $\Longrightarrow$ $f_n \to f$ na M.

<u>Příklady</u> • $M = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$. Pak $f_n \to f$ na M, kde $f(x) =$  $\big(f(x) = 0$ na $[0,1)$, $f(1) = 1\big)$.

Patrně $f_n \overset{loc}{\not\rightrightarrows} f$ na M, konvergence se kazí v levém okolí bodu 1. *)

• $M = [0,1]$, $M' = (0,1] = M \setminus \{0\}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Pak $f_n \to \underbrace{\equiv 0}_{f}$ na M (i M'), tj. $f(x) = 0$ $\forall x \in M$. Protože $f_n(1/n) = \frac{1}{2}$ $\forall n$, $f_n \not\rightrightarrows f$ na M' (ani na M). Není těžké vidět, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M', ale $f_n \overset{loc}{\not\rightrightarrows} f$ na M (konvergence se kazí v pravém okolí bodu 0).

• První příklad ukazuje, že bodová limita spojitých funkcí nemusí být spojitá.

• $M = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$. Pak $f_n \rightrightarrows \equiv 0$ na M.

*) Např. $f_n(1 - 1/n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} > 0$ pro $n \to \infty$.

$f: M \to \mathbb{R}$, definujeme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)|$.*) (potřebné označení

$\|c f\|_\infty = |c| \cdot \|f\|_\infty$, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \|f+g\|_\infty$)

$f_n \rightrightarrows f$ na $M \iff \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

$\boxed{\text{Tvrzení 2.1}}$ (Bolzanova-Cauchyova podmínka)

Nechť $f_n: M \to \mathbb{R}$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na M pro nějakou funkci $f: M \to \mathbb{R}$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0: m, n > n_0,\ x \in M \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

D. $\Rightarrow$. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M. Pro dané $\varepsilon > 0$ tedy ex. n_0, že $n > n_0,\ x \in M \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Pak i $m, n > n_0,\ x \in M \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)|$
$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, a $(f_n)_{n \geq 1}$

splňuje B.-C. p.

$\Leftarrow$. Nechť posloupnost funkcí $(f_n)_{n \geq 1}$ splňuje B.-C. p. Pro každé $x \in M$ je posl. čísel $(f_n(x))_{n \geq 1}$ Cauchyovská a má tedy vlastní limitu, kterou označíme $f(x)$:
$f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Máme funkci f, že $f_n \to f$ na M.

*) Tzv. L_∞-norma funkce f („el nekonečno...“)

Pro dané $\varepsilon > 0$ ~~[illegible]~~ máme n_0, že $m, n > n_0$, $x \in M$ $\Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ (B.-C.p.). Nechť $x_0 \in M$ je libovolné. Vezmu $N \in \mathbb{N}$ tak, že $N \geq n_0$ a že $|f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ (to mám díky $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$). Tak že $n > n_0 \Rightarrow$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < |f_n(x_0) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)|$$
$$< \underbrace{\varepsilon}_{\substack{\text{díky B.-C.p.} \\ \text{pro } (f_n)_{n\geq 1}}} + \underbrace{\varepsilon}_{\substack{\text{díky volbě} \\ \text{indexu } N}} = 2\varepsilon$$

Protože volba n_0 nezávisí na x_0, mám $f_n \rightrightarrows f$ na M. $\boxtimes$

Řekneme, že bodová konvergence $f_n \to f$ na M je <u>monotónní</u>, když každá (tj. $\forall x \in M$) posloupnost čísel $(f_n(x))_{n\geq 1}$ je neklesající, resp. každá taková posloupnost je nerostoucí.

Tvrzení 2.2 (situace, kdy $\overset{loc}{\rightrightarrows} \Rightarrow \rightrightarrows$, resp. $\to \Rightarrow \rightrightarrows$)

a) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) $\Longleftrightarrow$ pro $\forall$ kompaktní interval $[c,d] \subset (a,b)$ máme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[c,d]$. (<u>Pozn.</u> $\Leftarrow$ je triviální)

b) (Diniho věta) Nechť $f_n \to f$ monotónně na kompaktním intervalu $[a,b]$ a funkce f_n i f jsou na $[a,b]$ spojité. Potom $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

Důkaz nebudeme dělat. ⊠

$\boxed{\text{Věta 2.3}}$ (Mooreova–Osgoodova, záměna pořadí $\lim\limits_{n\to\infty}$ a $\lim\limits_{x\to x_0}$)

Nechť $f_n, f : M \to \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ na M, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ splňuje, že $P(x_0, \delta) \subset M$ pro nějaké $\delta > 0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$ je vlastní pro každé n. Potom existují vlastní limity $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ a rovnají se.

(T. 2.1)

D. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na M, splňuje $(f_n)_{n\geq 1}$ B.-C. podmínku ~~že pro každé $x \in M$ …, že posloupnost čísel $(f_n(x))_{n\geq1}$ je cauchyovská~~: pro dané $\varepsilon > 0$ ex. n_0, že $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ platí pro každé $x \in M$. Pro pevné $m, n > n_0$ nám limitní přechod $x \to x_0$ dá nerovnost $|a_m - a_n| \leq \varepsilon$. Posloupnost čísel $(a_n)_{n\geq 1}$ je tedy cauchyovská a (podle věty v ZS) má vlastní limitu $A \in \mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Zbývá ukázat, že $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Vzdálenost $|f(x)-A|$ pro x blízko k x_0 odhadneme pomocí Δ-ové nerovnosti jako

$$|f(x)-A| \leq \underbrace{|f(x)-f_n(x)|}_{V_1} + \underbrace{|f_n(x)-a_n|}_{V_2} + \underbrace{|a_n-A|}_{V_3} \quad (*)$$

(což je pravda pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in M$). ~~Protože~~ ~~[illegible]~~ Buď dáno $\varepsilon > 0$. Protože $a_n \to A$ (pro $n\to\infty$), ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, že $n > n_0 \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $V_3 < \frac{\varepsilon}{3}$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na M, ex. $n_1 \in \mathbb{N}$, že $n > n_1$ a $x \in M \Longrightarrow$ $\Rightarrow V_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Vezmeme $N \in \mathbb{N}$ takové, že $N > \max(n_0, n_1)$. Protože $\lim_{x\to x_0} f_N(x) = a_N$, existuje $\delta' > 0$ takové, že $x \in P(x_0, \delta') \Rightarrow |f_N(x) - a_N| < \frac{\varepsilon}{3}$, tj. $V_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. Pro toto $\delta' > 0$ a $n = N$ nám nerovnost $(*)$ dává, že $x \in P(x_0, \delta') \Longrightarrow |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Takže $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. $\boxtimes$

Za uvedených předpokladů, zejména stejnoměrné konvergence $f_n \rightrightarrows f$ na M, tj. M.-O. věta říká, že

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)}_{a_n} = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)}.$$

Bez předpokladu s. konvergence to neplatí, bodová konvergence nestačí, jak jsme výše viděli u funkcí x^n: na $[0,1)$ ~~to~~ máme

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1^-} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \text{ ale}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{x\to 1^-} (\equiv 0) = 0.$$

$\boxed{\text{Důsledek}}$ Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na I, přičemž funkce f_n jsou spojité (na I). Pak i f je spojitá (na I).

D. Nechť $x_0 \in I$ je libovolný (většinou vnitřní) bod. Pak, podle předchozí věty, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{\text{V. 2.3}}{=}$

$= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) \underset{\text{spojitost } f_n}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, takže f je spojitá v x_0. $\boxtimes$

Stejnoměrná i lok. stejnoměrná konvergence tedy zachovávají spojitost funkce. Cvičení 10 Rozhodněte, zda b. resp. s. konvergence zachovávají omezenost funkce.