Přednáška 6, 6. listopadu 2019

Stejnoměrná konvergence a normované prostory funkcí. Úplné prostory funkcí. Spojitá funkce bez derivace

Normované prostory funkcí. Bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupností funkcí můžeme uvažovat pro reálné funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ definované na libovolné neprázdné množině M, která nemusí nutně být podmnožinou $\mathbb{R}$, jak jsme tvrdili minule. (Pro lokálně stejnoměrnou konvergenci už potřebujeme na M mít metriku či topologii, abychom mohli mluvit o okolích bodů.) Pro zachycení stejnoměrné konvergence se více než metrický prostor v této situaci hodí struktura *normovaného (vektorového) prostoru* $N = (N, \|\cdot\|_\infty) = (N, \|\cdot\|)$, kde $N = \{f \mid f\colon M \to \mathbb{R}\}$ a (supremová, L_∞) norma

$$\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|\colon N \to [0, +\infty] = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

je definovaná jako

$$\|f\| := \sup(\{|f(x)| \mid x \in M\}) \ .$$

Norma $\|\cdot\|$ tedy může nabývat i hodnotu $+\infty$ a má tyto základní vlastnosti (pro každé $c \in \mathbb{R}$ a $f, g \in N$): (i) $\|f\| \geq 0$ a $\|f\| = 0$, právě když je f identicky nulová funkce, (ii) $\|cf\| = |c| \cdot \|f\|$ a (iii) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. Na N zde pohlížíme jako na reálný vektorový prostor s operacemi $f + g$ sčítání vektorů, zde tedy funkcí, f a g a skalárního násobení cf funkce f reálným číslem c, jejichž vlastnosti čtenář(ka) zná z lineární algebry. Pro ne zcela obvyklou povolenou hodnotu normy $+\infty$ dodáme výsledky operací s ní: $c(+\infty) = +\infty$ pro každé reálné $c > 0$, $0(+\infty) = 0$ a $(+\infty) + (+\infty) = c + (+\infty) = (+\infty) + c = +\infty$ pro každé reálné $c \geq 0$. Pokud se omezíme jen na omezené funkce, pak, jak dobře víme,

$$d(f,\, g) := \|f - g\|$$

dává metrický prostor (N, d).

Stejnoměrná konvergence a norma. Stejnoměrná konvergence je ekvivalentní konvergenci vzhledem k předchozí normě. Důkaz ponecháváme jako jednoduchou úlohu.

Tvrzení ($\rightrightarrows \iff \|\cdot\|_\infty \to 0$). *Nechť N je normovaný prostor všech reálných funkcí definovaných na nějaké neprázdné množině M a $f_n, f \in N$ s $n \in \mathbb{N}$.*

Pak

$$f_n \rightrightarrows f \textit{ na } M \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = \lim \|f_n - f\| = \lim d(f_n, f) = 0 \ ,$$

to jest funkce f_n, jako body v prostoru N, konvergují v N k limitě f.

Důkaz. Úloha 1. □

Zde se nám ale obecně objevují v hodnotách metriky nekonečné vzdálenosti (což jsme v definici metrického prostory nedovolili).

Další příklady. Viděli jsme, že pro $f_n(x) = x^n$ a f definovanou jako $f(x) = 0$ pro $0 \le x < 1$ a $f(1) = 1$ posloupnost funkcí $f_n \not\rightrightarrows f$ na $[0, 1]$ a ani na $[0, 1)$. Podle předchozího tvrzení ale není těžké vidět (úloha 2), že

$$f_n \overset{\mathrm{loc}}{\rightrightarrows} f \text{ na } [0, 1) \ .$$

Pokud[1] $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, pak $f_n \to \equiv 0$ na $\mathbb{R}$, ale vzhledem k hodnotám $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ tato konvergence není stejnoměrná a ani není na $\mathbb{R}$ lokálně stejnoměrná (úloha 3). Ale $f_n \rightrightarrows \equiv 0$ na každé $M \subset \mathbb{R}$, pro níž je 0 vnější bod (úloha 4). Konečně

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \rightrightarrows \equiv 0 \text{ na } \mathbb{R}$$

podle posledního tvrzení, protože $\|f_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ ($M = \mathbb{R}$) pro $n \to \infty$.

Uzavřená a omezená, ale ne kompaktní množina. Uvedeme příklad takové množiny X v nějakém metrickém prostoru. Jak víme, $\mathbb{R}^n$ pro to nestačí, potřebujeme nekonečnou dimenzi. Vezmeme si metrický prostor (N, d), kde $N = \{f \mid f\colon [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ a } f \text{ je omezená}\}$ a d je metrika odvozená z normy $\|\cdot\|_\infty$, a pro $n \in \mathbb{N}$ položíme

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \dots \quad x \ne 1/n \ , \\ 1 & \dots \quad x = 1/n \ . \end{cases}$$

Pak $(f_n) \subset N$ a $d(f_m, f_n) = 1$ pro každé $m \ne n$. Z těchto vzdáleností vyplývají všechny tři požadované vlastnosti množiny $X = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset N$: je uzavřená, omezená a nekompaktní (úloha 5).

[1]Tyto dva další příklady jsem na přednášce neuvedl.

Tvrzení (první úplný prostor funkcí). *Je-li M libovolná neprázdná množina, pak normovaný prostor N omezených reálných funkcí definovaných na M je úplný, to jest (N, d) s metrikou $d(f, g) = \|f - g\|$ je úplný metrický prostor.*

Důkaz. Nechť $(f_n) \subset N$ je Cauchyova posloupnost v normovaném prostoru $(N, \|\cdot\|)$, dokážeme, že (f_n) má v N limitu. Speciálně pro každé pevné $a \in M$ je $(f_n(a)) \subset \mathbb{R}$ Cauchyova posloupnost reálných čísel a (podle jedné z hlavních vět v *Matematické analýze I*) má vlastní limitu $\lim f_n(a) =: f(a) \in \mathbb{R}$. Dostali jsme funkci $f\colon M \to \mathbb{R}$, že $f_n \to f$ na M. Dokážeme, že dokonce $f_n \rightrightarrows f$ na M.

Buď tedy dáno $\varepsilon > 0$. Podle cauchyovskosti posloupnosti (f_n) zvolíme n_0, že pro každé $m, n \ge n_0$ je

$$\forall\, x \in M:\ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2\ .$$

Buď dále dáno $a \in M$. Protože $\lim f_n(a) = f(a)$, můžeme si zvolit m, že $|f_m(a) - f(a)| < \varepsilon/2$ a $m \ge n_0$. Pak pro každé $n \ge n_0$ je (podle trojúhelníkové nerovnosti)

$$|f_n(a) - f(a)| \le |f_n(a) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ .$$

První $|\cdots| < \frac{\varepsilon}{2}$ podle (stejnoměrné) cauchyovskosti posloupnosti (f_n) a pro druhou to platí též díky volbě m. Pro každé $a \in M$ a každé n s $n \ge n_0$ tedy je $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$, takže f_n na M stejnoměrně konvergují k f a $\lim f_n = f$ v normovaném prostoru všech reálných funkcí definovaných na M.

My ale máme jen omezené funkce a proto musíme ještě dokázat, že f je omezená. Kdyby nebyla, posloupnost (f_n) by v N limitu neměla. Vezmeme n, že $\|f - f_n\| \le 1$ (což lze díky tomu, že $f_n \rightrightarrows f$ na M). Protože f_n je omezená, existuje reálné c, že $\|f_n\| \le c$. Podle trojúhelníkové nerovnosti máme $\|f\| \le \|f - f_n\| + \|f_n\| \le 1 + c$, takže f je omezená. $\square$

Omezenost po funkcích v N požadujeme jen pro to, abychom dostali „řádnou“ metriku bez nekonečných vzdáleností (úloha 6).

Věta (druhý úplný prostor funkcí). *Pro každý metrický prostor (M, d) je normovaný prostor $N = (N, \|\cdot\|_\infty)$ spojitých reálných funkcí definovaných na M úplný.*

Důkaz. Nechť $(f_n) \subset N$ je Cauchyova posloupnost v normovaném prostoru N všech spojitých funkcí z metrického prostoru M do reálných čísel, dokážeme, že (f_n) má v N limitu. V předchozím důkazu jsme už dokázali existenci funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$, že $f_n \rightrightarrows f$ na M. Zbývá dokázat, že f je spojitá.

Dokážeme, že f je spojitá v daném bodě $a \in M$. Buď dále dáno $\varepsilon > 0$. Protože $f_n \rightrightarrows f$ na M, zvolíme m, že

$$\forall\, x \in M : \ |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \ .$$

Protože f_m je spojitá funkce (v každém bodu M), existuje $\delta > 0$, že

$$x \in B(a,\, \delta) \Rightarrow |f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/3 \ .$$

Koule $B(a, \delta)$ je v metrickém prostoru (M, d). Pro každé $x \in B(a, \delta)$ pak i

$$|f(x) - f(a)| \le |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| < \varepsilon \ .$$

První a třetí $|\cdots| < \frac{\varepsilon}{3}$ díky volbě m a pro druhou to platí též díky spojitosti f_m v a. Takže f je spojitá v a. $\square$

Spojitá funkce na nekompaktním metrickém prostoru (jako je třeba $\mathbb{R}$) nemusí být omezená, takže zde opět dostáváme obecně „metriku“ $\|f - g\|$ s nekonečnými vzdálenostmi. Věta vlastně říká, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce (úloha 7).

Důsledek (úplný prostor $\mathrm{C}[a, b]$). *Pro každá dvě reálná čísla $a \le b$ je normovaný prostor $\mathrm{C}[a, b] = (\mathrm{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ spojitých reálných funkcí definovaných na intervalu $[a, b]$ úplný.*

Důkaz. Speciální případ předešlé věty, ale díky omezenosti spojitých reálných funkcí na kompaktních množinách, což intervaly $[a, b]$ jsou, zde máme omezené funkce a tedy „řádnou“ metriku s pouze konečnými vzdálenostmi. $\square$

Předchozí úplné prostory funkcí jsou poměrně přímočaře odvozeny z úplného Euklidovského prostoru $\mathbb{R}$, tedy reálné osy, jehož fundamentálnost jako úplného metrického prostoru nyní vyvstává jasněji.

Spojitá funkce bez derivace. Nyní uvedeme, tedy alespoň započneme, slíbený důkaz existence spojité funkce $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, která pro žádné $a \in [0, 1]$ nemá vlastní $f'(a)$. Je založený na použití Baireovy věty v úplném prostoru $\mathrm{C}[0, 1]$.

Věta (spojitá funkce bez derivace). *Existuje taková spojitá funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, že pro každé $x \in [0,1]$ a každé $\delta > 0$ je*

$$\sup\left(\left\{\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \;\middle|\; y \in P(x,\,\delta) \cap [0,\,1]\right\}\right) = +\infty\ .$$

Taková f nemá pro žádné $x \in (0,1)$ vlastní $f'(x)$ a nemá ani vlastní $f'_+(0)$ ani vlastní $f'_-(1)$.

Připomínáme, že $P(x,\,\delta) = (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$ označuje prstencové δ-okolí bodu x. Uvedená vlastnost $\sup(\dots) = +\infty$ funkce f má následující geometrický smysl. Pro každé $x \in [0,1]$, každé $\delta > 0$ a každé velké $c > 0$ (např. $c = 10^{100}$) se v $[0,1]$ nachází takové číslo y různé od x, jež je ale k x blíže než δ, že sečna grafu funkce f odpovídající číslům x a y, což je přímka v rovině $\mathbb{R}^2$ jdoucí body $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$, je velmi strmá, roste či klesá se sklonem $|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}| > c$. Je jasné, že taková funkce f nemá v bodě (čísle) x vlastní derivaci (tečnu).

Důkaz věty běží, krátce řečeno, následovně. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme podmnožiny $A_n \subset \mathrm{C}[0,1]$,

$$A_n = \{f \in \mathrm{C}[0,1] \mid \exists\, x \in [0,\,1]\ \forall\, y \in [0,\,1]:\ y \neq x \Rightarrow |\tfrac{f(y)-f(x)}{y-x}| \le n\}\ .$$

Ukazuje se, že jsou řídké, a proto podle Bairovy věty existuje funkce f v $\mathrm{C}[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Odtud plyne, že taková f má vlastnost uvedenou ve větě. Podrobně si důkaz věty povíme příště.

Úlohy

1. Dokažte první tvrzení přednášky.

2. Dokažte, že $f_n \overset{\mathrm{loc}}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1)$, když $f_n(x) = x^n$ a f je bodová limita funkcí f_n na $[0,1)$, tedy identická nula.

3. Dokažte, že pro $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ posloupnost funkcí $f_n \overset{\mathrm{loc}}{\not\rightrightarrows} \equiv 0$ na $\mathbb{R}$.

4. Dokažte, že pro $f_n(x)$ z předchozí úlohy je konvergence stejnoměrná na $(-\infty, -\delta) \cup (\delta, +\infty)$ pro každé $\delta > 0$.

5. Dokažte, že na přednášce definovaná množina funkcí $X = \{f_1, f_2, \dots\} \subset N$ je uzavřená a omezená, ale není kompaktní.

6. Dokažte, že normovaný prostor všech reálných funkcí definovaných na nějaké neprázdné množině je úplný.

7. Jak přesně plyne z první věty přednášky, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce?

8. Dokažte, že pro konečnou M z $f_n \to f$ na M plyne $f_n \rightrightarrows f$ na M.

9. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M a $g_n \rightrightarrows g$ na M. Rozhodněte, zda pak i $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ na M.

10. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M a $g_n \rightrightarrows g$ na M. Rozhodněte, zda pak i $f_n g_n \rightrightarrows fg$ na M.